

На правах рукописи



МИЩЕНКО Андрей Викторович

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ  
РАСЧЕТА КОМПОЗИТНЫХ ПРОФИЛИРОВАННЫХ  
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

05.23.17 – Строительная механика

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Новосибирск - 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном казенном военном образовательном учреждении высшего профессионального образования  
«Военный учебно-научный центр Сухопутных войск  
«Общевойсковая академия Вооруженных сил Российской Федерации»  
(филиал, г. Новосибирск)

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор  
**Немировский Юрий Владимирович**

Официальные оппоненты: **Дмитриева Татьяна Львовна**, доктор технических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Иркутский национальный исследовательский технический университет», г. Иркутск, профессор кафедры «Сопротивление материалов и строительная механика»

**Потапов Александр Николаевич**, доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (Национальный исследовательский университет), г. Челябинск, заведующий кафедрой «Строительная механика»

**Шеин Александр Иванович**, доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства», г. Пенза, заведующий кафедрой «Механика»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», г. Москва

Защита диссертации состоится 25 декабря 2015 г. в 14-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.265.01 в Томском государственном архитектурно-строительном университете по адресу: 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, корп. 2, ауд. 303, тел./факс (3822) 659952.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного архитектурно-строительного университета и на сайте [www.tsuab.ru](http://www.tsuab.ru).

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2015 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Н.О. Копаница

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность проблемы.** Стержневые системы являются одним из самых распространенных видов инженерных конструкций, широко используемых в качестве несущих каркасов объектов в различных областях техники, в том числе – в промышленном и гражданском строительстве. В большинстве своем они состоят из однородных элементов призматической формы, оптимизационный ресурс которых в настоящее время приближается к исчерпанию. Дальнейшее совершенствование стержневых систем требует внедрения в практику проектирования новых подходов и принципов. Наиболее существенными из них являются: а) применение неоднородных эффективных структур и б) усложнение геометрических форм, полученных в результате рационального и оптимального проектирования.

По отдельности указанные принципы имеют место в некоторых типах конструктивных решений. Так, идея усложнения форм однородных конструкций нашла свое воплощение в алгоритмах поиска оптимальной локальной геометрии с применением критерия равнонапряженности. В различных отраслях техники находят применение дисперсно- и дискретно-неоднородные системы: слоистые пластины и оболочки, комбинированные дерево-пластмассовые, дерево-металлические конструкции, композитные конструктивные элементы на полимерной, углеродной, металлической и органической основах. Вместе с тем следует отметить, что в стержневых системах неоднородные структуры используются пока крайне незначительно. В сооружениях с разделенными функциями конструкций в настоящее время назрела необходимость применения неоднородных структур не только в ограждающих, но и в несущих элементах, выполненных из набора различных конструкционных материалов.

Принципы рационального проектирования неоднородных профилированных конструкций должны строиться на непрерывно-дискретном соответствии, согласно специальным расчетным критериям, двух групп функций. В первую входят структурные параметры и функции, описывающие пространственное распределение и физические свойства неоднородной среды конструкции, а во вторую – параметры и функции ее напряженно-деформированного состояния. Полученные таким образом системы со структурой, адаптированной к напряженно-деформированному состоянию, обладают повышенной прочностью, жесткостью, долговечностью в сочетании с уменьшенной материалоемкостью в таких количественных показателях, которые уже не удастся получить в классе традиционных однородных систем.

Таким образом, рассмотрение в диссертации методов расчета и всестороннего анализа новых конструкций в виде композитных систем с профилированными стержнями является актуальным и перспективным направлением исследования.

**Степень разработанности темы.** Главной причиной, сдерживающей внедрение неоднородных профилированных стержневых систем в практику

проектирования, является явно не достаточная степень разработанности данного направления, заключающаяся в отсутствии необходимых исследований, постановок, методов и расчетных алгоритмов решения наиболее важных практических задач: прямых и оптимизационных, в условиях статического и динамического нагружения, при учете нелинейных и реологических факторов деформирования.

**Цель диссертационной работы** заключается в разработке теоретических основ, практических методов и алгоритмов прямого расчета, рационального и оптимального проектирования произвольных плоских стержневых систем, составленных из композитных профилированных стержней при разнообразных внешних воздействиях, условиях работы и используемых материалах.

**Основные задачи**, поставленные в работе.

Разработка обобщенной расчетной модели композитной плоской стержневой системы, характеризующейся целесообразной вычислительной трудоемкостью и адекватно с заданной точностью отражающей процессы деформирования, пригодной для широкого спектра заданных воздействий, используемых материалов и внешних условий.

Выполнение постановок обратных задач рационального и оптимального проектирования на базе сформулированных непрерывно-дискретных многоточечных расчетных критериев в условиях статического и динамического деформирования при кратковременных и длительных воздействиях. Исследование условий реализации многоточечных критериев.

Разработка эффективных методов решения прямых и обратных задач статики и динамики композитных стержневых систем при мгновенном и длительном воздействии в условиях неустановившейся ползучести.

Постановка и разработка метода решения задачи нелинейной устойчивости процесса деформирования композитных стержневых систем.

На базе созданного расчетного аппарата выполнение численных исследований рациональных проектов композитных стержневых систем, анализ эффективности данных систем и предложенных методов их расчета.

**Научная новизна и теоретическая значимость работы**

Предложен новый подход, расширяющий существующие концепции и принципы проектирования стержневых систем, основанный на использовании неоднородных структур в сочетании с геометрическим профилированием элементов. Введен ряд новых понятий: а) непрерывно-дискретных расчетных критериев составных композитных стержней (КС), используемых в задачах статики, динамики, нелинейного деформирования и ползучести; б) КС с заданными свойствами деформирования; в) КС со смещенными центрами сечений; г) относительной нагруженности многофазного сечения, композитного стержня и системы; д) жесткостных характеристик высших порядков; е) фиктивного скачка ползучести материала и системы.

Для реализации данного подхода разработана серия непрерывно-дискретных многоточечных расчетных критериев (НДРК), позволивших

выполнить постановки обратных задач рационального проектирования композитных стержневых систем при термосиловом статическом, динамическом, многовариантном и длительном воздействии. Получены условия существования четырех типов равнокритериальных решений в задачах рационального проектирования. Разработана обобщенная расчетная модель композитной нелинейно деформируемой стержневой системы, адекватно отражающая разнообразные процессы деформирования, пригодная для широкого спектра внешних воздействий и используемых конструкционных материалов.

Раскрыты особенности проявления теории рационального проектирования КС, заключающиеся а) в наличии разрывности области существования решений, в вырождении проектируемых слоев и необходимости использования дополнительных геометрических ограничений; б) возможности использования модели стержня со смещенными центрами сечений для решения вариационных задач поиска рационального контура более простыми средствами.

Разработан метод решения задач рационального проектирования композитных систем, выполненных из произвольного набора материалов при статических, динамических, мгновенных воздействиях, позволяющий выявлять рациональную физическую структуру и геометрические формы КС.

Предложен двухэтапный гибридный метод полной оптимизации функциональных геометрических параметров КС системы, позволяющий максимально увеличить кратность НДРК в каждом стержне и, тем самым, повысить эффективность системы в целом. На первом этапе метод содержит процедуру рационального проектирования при удовлетворении НДРК, а на втором – процедуру условной оптимизации геометрических параметров по критерию минимума функционала стоимости материалов системы.

Предложен вариант решения проблемы поиска глобального минимума в многоэкстремальных задачах оптимального проектирования. С этой целью разработан метод нахождения начальных проектов, тяготеющих к локальным экстремумам, основанный на решении вспомогательной задачи оптимизации при учете сокращенного комплекса ограничений – локальных ограничений (по прочности). Описан автоматизированный матричный алгоритм выявления полной серии начальных проектов при числе варьируемых параметров, равном числу используемых ограничений этапа рационального проектирования.

На основе двухкомпонентной реологической модели неустановившейся ползучести термочувствительных материалов, содержащей фиктивный скачок деформации, выполнены постановки и разработаны методы решения прямых и обратных задач длительной прочности и жесткости композитных систем. В их числе задачи рационального проектирования и выявления ресурса заданной композитной системы.

На основе принципа варьирования нагруженности системы разработан метод исследования устойчивости процесса нелинейного деформирования и

возникающих в этом процессе предельных состояний произвольной композитной стержневой системы.

### **Практическая значимость работы**

Разработанные методы и расчетные алгоритмы, а также составленные на их основе программные комплексы, позволяют выполнять разнообразные практические расчеты произвольных плоских композитных систем на всевозможные воздействия. Тем самым закладывается расчетно-теоретическое обоснование для использования таких систем в качестве нового эффективного конструктивного решения для несущих каркасов инженерных объектов.

Определены пределы практического использования разработанной теории для композитных систем, содержащих стержневые элементы, изготовленные из различных материалов: металлов, древесины, конструкционных пластмасс. Одноименные физические характеристики используемых материалов не должны отличаться более чем в 50-55 раз, а отношения поперечных размеров стержней к их длинам – не превышать 0,2. Перспективность разработанной теории рационального проектирования заключается: а) в возможности получения значительной экономии расхода и стоимости материалов конструкции до 35–40%, б) в проектировании стержневых систем повышенной прочности, жесткости и долговечности, в) в создании эффективных способов усиления конструктивных элементов путем применения высокопрочных наружных слоев.

Представлены рекомендации и предложения: а) по использованию принципов рационального проектирования неоднородных элементов несущих конструкций; б) по совершенствованию методов расчета слоистых конструкций с применением древесины, заключающиеся в использовании уточненной нелинейной модели деформирования; в) по динамическому расчету сооружений башенного типа на ветровые нагрузки; г) по внедрению эффективной методики расчета стержневых систем на длительную прочность.

Практическая значимость выполненных разработок подтверждается:

поддержкой *грантов Минобрнауки РФ*: проект 96-21-1-7-69 «Исследование рациональной структуры армирования железобетонных панелей, плит и оболочек с целью снижения материалоемкости, повышения надежности и экономичности зданий и сооружений», руководитель Ю.В. Немировский; проект Т00-12.1-1088 «Теория мозаичного проектирования строительных конструкций», руководитель Ю.В. Немировский; проект Т02-12.1-1370 «Разработка теории гибридного проектирования стержневых строительных конструкций», руководитель Ю.В. Немировский; проект 2.1.2/4822 «Разработка теории расчета и оптимизации конструкций и систем из однородных и композитных материалов при гармонических, взрывных и сейсмических нагрузках», руководитель Г.И. Гребенюк;

*грантов РФФИ*: проект 05-01-0061 «Теория деформирования и повреждаемости плоских однородных и композитных преград», руководитель

Ю.В. Немировский; проект 07-08-00152-а «Оптимизация конструкций в условиях предельных состояний и длительной эксплуатации», руководитель И.Т. Вохмянин; проект 08-01-00046-а «Ползучесть и длительная прочность композитных конструкций», руководитель Ю.В. Немировский; проект 11-08-00186а «Реология, предельные состояния и динамика оболочек», руководитель И.Т. Вохмянин; проект 11-01-00121 «Динамика пластинчатых тонкостенных композитных преград», руководитель Ю.В. Немировский; проект 14-01-00102 «Гибридное и оптимальное проектирование конструкций», руководитель Ю.В. Немировский; проект 14-01-90400 «Исследование проблем управления тепловыми и термонапряженными полями в композитных конструкциях», руководитель Ю.В. Немировский.

#### **Методология и методы диссертационного исследования**

В диссертационном теоретическом исследовании применены методы и методологические принципы: системного подхода, позволяющего раскрыть многообразие проявлений изучаемого объекта; моделирования – как способа исследования объекта, его основных свойств, законов движения и взаимодействия с внешней средой; эмпирического подхода, связанного с постановкой проверок разработанной теории. Работа характеризуется научно обоснованной постановкой проблемы исследования, которая может быть реализована практически с получением новых научных результатов, законченностью и цельностью исследования.

#### **На защиту выносятся**

1. Новый принцип рационального проектирования стержневых систем, основанный на совместном использовании неоднородных структур и геометрического профилирования стержневых элементов.

2. Непрерывно-дискретные многоточечные критерии расчетных предельных состояний композитных стержней при статическом и динамическом, мгновенном и длительном воздействиях и полученные на их основе необходимые условия существования решений задач рационального проектирования.

3. Двухэтапный метод решения обратных задач рационального проектирования композитных стержневых систем, основанный на процедурах с разделенными группами искомым функций, позволяющий при широком спектре внешних воздействий находить проекты систем, обладающие улучшенными показателями качества, пониженным расходом материалов, адаптированные к запроектным воздействиям.

4. Способы построения физических соотношений материала, композитного стержня и системы, основанные на аппроксимации основной компоненты тензора напряжений разложениями по базисным функциям деформации.

5. Гибридный метод условной оптимизации композитной системы с варьированием геометрии и структуры стержней, содержащий а) процедуру рационального проектирования при удовлетворении расчетных критериев и

б) процедуру оптимизации геометрических параметров по условию минимума функционала стоимости материалов системы.

6. Метод исследования устойчивости процесса нелинейного деформирования композитной стержневой системы, основанный на варьировании параметра нагруженности, позволяющий выявлять различные предельные состояния системы, в том числе – состояние при максимуме нагрузки.

7. Методы решения прямых и обратных задач неустановившейся ползучести композитных стержневых систем с использованием различных реологических моделей, в том числе – модели ползучести с начальным скачком деформации для термочувствительного материала.

8. Новые понятия теории расчета КС: а) непрерывно-дискретный расчетный критерий, б) стержень с заданными свойствами деформирования, в) стержень со смещенными центрами сечений, г) относительная нагруженность многофазного сечения, КС и системы, д) жесткостные характеристики высших порядков, е) состояние фиктивного скачка ползучести системы.

**Достоверность результатов** подтверждается их соответствием решениям других авторов и экспериментам по испытанию неоднородных стержней, обоснованностью применения гипотез и математических методов, соблюдением предельных переходов и получением на основе разработанных подходов известных частных случаев, в числе которых: решения для однородных систем со стержнями постоянного и переменного сечения, решения для двух- и трехслойных стержней.

**Внедрение результатов исследования** подтверждено справками, выданными: ОАО Новосибирский проектно-конструкторский и научно-исследовательский институт по экологическим проблемам «ЭкоНИИпроект» (г. Новосибирск), ООО «Томский инженерный центр» (г. Томск), ООО ПЭК «РЕКОН» (г. Новосибирск), регистрацией программы ЭВМ для рационального проектирования композитных стержневых систем на основе непрерывно-дискретного критерия.

**Апробация результатов работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались: на Всероссийском семинаре (с 2010 г. – конференции) «Проблемы оптимального проектирования сооружений» (Новосибирск, 1996 – 2015 гг.); на 2-ом Белорусском конгрессе по теоретической и прикладной механике «Механика - 99» (Минск, 1999); на Международной научно-технической конференции «Проблемы научно-технического прогресса в строительстве в преддверии нового тысячелетия» (Пенза, 1999); на 16, 17, 18, 19, 23 и 24-й Межреспубликанских конференциях «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности» (Новосибирск, 1999, 2001; Кемерово, 2003; Бийск, 2005, Барнаул, 2013; Омск, 2015); на II Международной научно-практической конференции «Сооружения, конструкции, технологии и строительные материалы XXI века» (Белгород, 1999); на III Международном конгрессе «Ресурсо- и энергосбережение в реконструкции и новом строительстве» (Новосибирск, 2000); на Международной конференции «Оценка и обоснование продления ресурса



элементов конструкций» (Киев, 2000); на школе-семинаре, посвященной 70-летию проф. Д.Д. Ивлева «Современные проблемы механики и прикладной математики» (Воронеж, 2000); на XXX и XXXI Уральских семинарах «Неоднородные конструкции» (Екатеринбург, 2000, 2002); на Международной научно – технической конференции «Итоги строительной науки» (Владимир, 2001); на Международной конференции по физической мезомеханике, компьютерному конструированию и разработке новых материалов (Томск, 2004); на III Международной научно-технической конференции «Современные проблемы совершенствования и развития металлических, деревянных, пластмассовых конструкций в строительстве и на транспорте» (Самара, 2005); на 8-й Всероссийской научной конференции «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 2006); на Всероссийских конференциях «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций» (Новосибирск, 2006, 2011); на V Международной научно-технической конференции «Современные проблемы машиностроения» (Томск, 2010); на Всероссийской научно-практической конференции «Строительная наука и практика» (Чита, 2010); на XV и XVI научно-методических конференциях ВИТУ «Дефекты зданий и сооружений. Усиление строительных конструкций» (Санкт-Петербург, 2011, 2012); на XVII Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, (Москва, 2011); на 65 и 66 Всероссийских научно-технических конференциях СибАДИ «Ориентированные фундаментальные и прикладные исследования – основа модернизации и инновационного развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплексов России» (Омск, 2011, 2012); на XI Всероссийской научно-практической конференции «Фундаментальные науки в современном строительстве» (Москва, МГСУ, 2014).

Диссертационная работа в целом докладывалась и обсуждалась на научных межкафедральных семинарах: Томского государственного архитектурно-строительного университета (руководитель - академик РААСН Л.С. Ляхович, Томск, 2014, 2015 гг.); Сибирского государственного университета путей сообщения (руководитель - д.т.н., проф. М.Х. Ахметзянов, Новосибирск, 2006 г.); Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии (СибАДИ) (руководитель - д.т.н., проф. С.А. Матвеев, Омск, 2011 г.); Новосибирского государственного технического университета (руководитель - д.т.н., проф. В.Е. Левин, Новосибирск, 2011 г.); Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин) (руководитель - д.т.н., проф. В.М. Митасов, Новосибирск, 2012 г.); семинаре отдела механики деформируемого твердого тела Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (руководитель - академик РАН Б.Д. Аннин, Новосибирск, 2012 г.); семинаре кафедры строительной механики Московского государственного строительного университета (руководитель - д.т.н., проф. В.Л. Мондрус, Москва, 2015 г.).

**Публикации.** Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 68 научных работах, в их числе: одна монография, 40 статей в научных изданиях, входящих в перечень ВАК для докторских диссертаций.

**Структура и объем работы.** Диссертация объемом 421 с. состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы из 487 наименований и приложений.

Автор выражает благодарность научному консультанту Юрию Владимировичу Немировскому, доктору физико-математических наук, профессору, главному научному сотруднику ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН за ценные советы по диссертационной работе.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы исследования, дается общая характеристика работы.

**В первой главе** выполнен обзор литературных данных по проблемам расчета неоднородных стержней и стержневых систем.

Системы, составленные из неоднородных стержней, представляющие собой единую конструкцию, до настоящего времени не рассматривались в литературе и не нашли своего применения в инженерной практике. Это относится как к статическим задачам, так и еще в большей степени к задачам динамического, нелинейного и длительного деформирования.

Расчетно-теоретический базис таких новых конструкций основывается на теориях расчета композитного стержня и методах всестороннего анализа стержневых систем при разнообразных условиях деформирования.

В настоящее время известны различные способы построения расчетных моделей КС. Расчету неоднородных конструкций посвящена обширная литература, связанная с именами таких ученых, как Н.А. Алфутов, С.А. Амбарцумян, А.Н. Андреев, В.И. Андреев, В.В. Болотин, Ю.И. Бутенко, В.В. Васильев, А.Л. Гольденвейзер, Э.И. Григолюк, А.Н. Гузь, Ф.А. Коган, Р. Кристенсен, В.А. Крысько, С.Г. Лехницкий, А.К. Малмейстер, Ю.В. Немировский, И.О. Образцов, В.Н. Паймушин, Б.Л. Пелех, В.В. Петров, В.Г. Пискунов, А.В. Плеханов, Б.Е. Победря, А.П. Прусаков, Е. Рейсснер, А.Р. Ржаницын, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс, П.П. Чулков, S.C. Baxter, T.S. Chow, R.M. Jones, C.D. Horgan, F.J. Plantema, J.N. Reddy, R. Rikards и многих др.

Важным выводом, следующим из анализа деформирования стержней, является то, что степень уточнения основного решения по неклассическим теориям в сравнении с классической теорией Бернулли – Эйлера зависит от геометрического отношения  $l/h$  и от отношения характеристик упругости  $E_k/G_k$  материала  $k$ -го слоя, а также  $E_{\max}/E_{\min}$  – по слоистому пакету в целом. В работах А.Н. Андреева, В.В. Васильева, Ю.В. Немировского, Г.Л. Горынина, О.В. Горика, Э.С. Остерника, В.Г. Пискунова, А.П. Прусакова и др. показано, что при использовании в слоях материалов с одно-

именными упругими характеристиками одного порядка и при  $l/h > 5$  классическая модель достаточно хорошо описывает НДС. Лишь при условиях  $E/G > 20 \div 30$ , или  $E_{\max}/E_{\min} > 30 \div 40$ , или  $l/h < 5$  необходим учет сдвиговых эффектов.

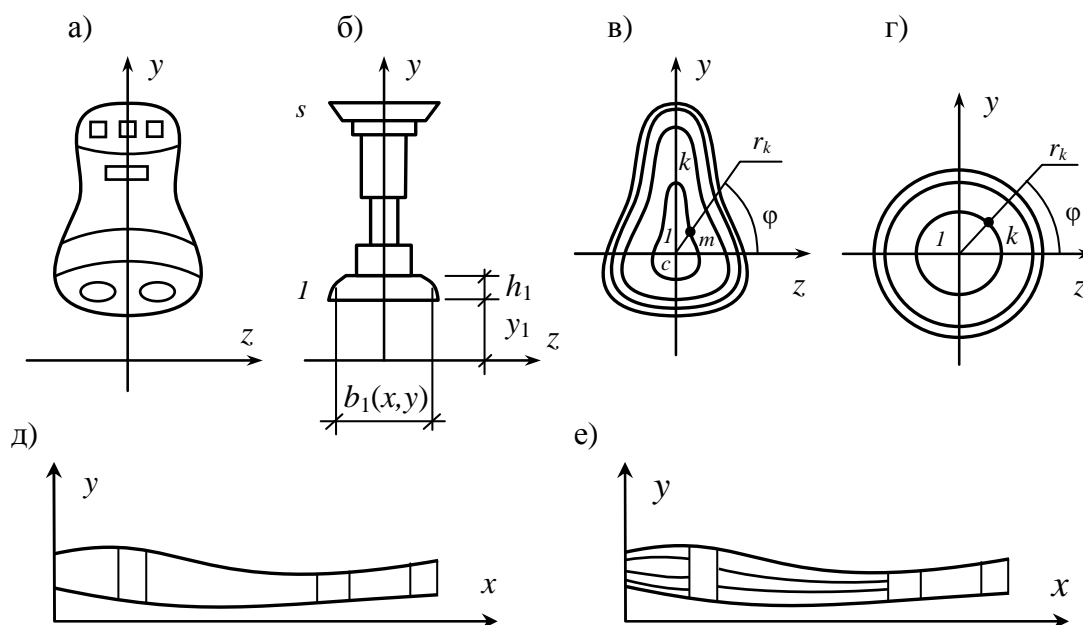
Рассматриваемые в работе стержневые системы, предназначенные для использования в качестве несущих каркасов инженерных сооружений, полностью удовлетворяют указанным условиям. Геометрические ограничения ( $l/h \sim 10 \div 20$ ) удовлетворяются в силу специфики компоновки таких систем, а физические – в силу отсутствия в структурах КС материалов с низкими модулями упругости. Изолирующие функции успешно выполняются специальными ограждающими конструкциями. В конструктивных элементах адаптированных стержневых систем целесообразно применять материалы с различными одноименными физическими характеристиками, но имеющими одинаковый порядок значений. Неоправданное усложнение расчетной модели КС при рассмотрении стержневых систем может привести к непреодолимым осложнениям расчетов и потому – не целесообразно.

В статике многослойных стержневых конструкций известные решения получены для некоторых балок, сжато-изогнутых стержней, осесимметричных валов и ферм. Задачи динамики слоисто-неоднородных стержней, связанные с проблемой собственных значений и прямым динамическим деформированием, рассмотрены в работах В.В. Васильева, Э.Ю. Григолюка и И.Т. Селезова, В.Н. Бакулина и В.А. Потопахина, М.Н. Гофмана и А.С. Космодамианского, Г.Л. Горынина, К.С. Нумаира, М.А. Хаддада, А.Ф. Аюба, В.Г. Пискунова, И.М. Дидыченко, А.М. Федоренко, А.В. Крысько, М.В. Жигалова и О.А. Салтыковой, В.А. Фирсова, И.С. Селина. Обратные задачи представлены лишь в работах Ю.В. Немировского и И.Т. Вохмянина, в которых для трехслойных стержней на основе непрерывного удовлетворения критерия прочности на наружных поверхностях найден рациональный закон изменения ширины наружных слоев. Для многослойных балок Эйлера с двухосносимметричным сечением Ю.В. Немировским описано правило назначения рациональных толщин слоев. Им же рассмотрена задача рационального проектирования слоистых стержней при действии гармонических нагрузок.

Постановки физически и геометрически нелинейных (ФН и ГН) задач для структурно-неоднородных конструкций характеризуются существенной трудоемкостью и применительно к отдельным конструктивным элементам отражены в работах: В.Г. Пискунова и В.Е. Вериженко (ФН слоистые оболочки, пластины, балки); Ю.В. Немировского и А.В. Шульгина (ФН слоистые плиты); А.П. Прусакова (ФН изгиб многослойных оболочек); С.Г. Бурыгина, В.Е. Вериженко и А.С. Дехтяря (несущая способность идеально упругопластических многослойных пластин); Di Sciuva Marco (ГН многослойные плиты), P. Foraboschi (модель двухслойной составной балки с упругопластической прослойкой). Обратные задачи не рассмотрены.

Реологические задачи расчета композитных стержней в литературе практически не освещены, за исключением работ Ю.В. Немировского. Основой при решении таких задач является принятая модель ползучести, определяющая достоверность и трудоемкость расчетов. Разработке моделей и теорий ползучести однородных материалов посвящено большое число работ, анализ которых выполнен в известных монографиях Л.М. Качанова, М.А. Колтунова, А.М. Локощенко, Н.Н. Малинина, А.Ф. Никитенко, И.А. Одингга, Ю.Н. Работнова, А.Р. Ржаницына, К.Г. Odqvist. Наибольшие успехи достигнуты в результате применения модели установившейся ползучести (МУП), являющейся самой распространенной в постановках реологических задач. Вместе с тем установлено, что в случае использования материалов, имеющих значительные деформации первой стадии неустановившейся ползучести, МУП приводит к существенным погрешностям деформированного состояния.

**Вторая глава** посвящена построению расчетных моделей и основных соотношений для композитного стержня и системы.



**Рис. 1.** Структуры композитных стержней

2.1. Структура КС образована соединением различных по физическим свойствам квазиоднородных частей (фаз) конечных размеров, принимающих в пространстве произвольную геометрическую форму (рис. 1). Ось  $x$  локальной системы координат  $xyz$  имеет продольное направление, структура обладает свойствами симметрии относительно плоскости  $xu$ . Стержень испытывает прямой продольно-поперечный динамический изгиб в плоскости  $xu$  при термосиловом кратковременном и длительном воздействиях.

Считается, что в стержне: а) обеспечены условия идеального межфазного контакта, б) материал каждой фазы сплошной, однородный, изотропный, в) стационарные значения одноименных физических характеристик материалов отличаются не более, чем в 50-55 раз, г) материалы обладают

свойствами нелинейной упругости, д) обеспечено условие относительной тонкости  $l \geq (5 \div 6)h$ .

В зависимости от геометрических параметров и направления, в котором реализована неоднородность, могут быть выделены структуры КС: общего вида (а), поперечно-слоистая (б), полярно-слоистая (в), радиально-слоистая (г), продольно-слоистая (д), продольно-поперечно-слоистая (е).

2.2. Будем считать, что в КС для величин деформаций, сдвигов, продольных  $u$  и поперечных  $v$  перемещений, углов поворота  $\theta$  в момент времени  $t$  выполняются соотношения

$$\varepsilon_x(x, y, t) = \varepsilon_0(x, t) - \kappa(x, t) \cdot y, \quad \varepsilon_y(x, y, t) = 0, \quad \gamma_{yx}(x, y, t) = -\gamma_0(x, t), \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_0(x, t) = u' + 0,5(v')^2, \quad \kappa(x, t) = \theta', \quad \theta(x, t) = v'(x, t) + \gamma_0(x, t). \quad (2.2)$$

Дифференциальные уравнения движения КС, взаимодействующего с вязкоупругой средой, для интегральных силовых факторов имеют вид

$$\begin{cases} N' + (Q\theta)' - \beta_{xx}u + \beta_{x\theta}\theta - c_{xx}\dot{u} + c_{x\theta}\dot{\theta} - m_A\ddot{u} + m_S\ddot{\theta} = -q_x(x, t), \\ Q' - (N\theta)' + \beta_{yy}v + c_{yy}\dot{v} + m_A\ddot{v} = q_y(x, t), \\ M' + \beta_{x\theta}u - \beta_{\theta\theta}\theta + c_{x\theta}\dot{u} - c_{\theta\theta}\dot{\theta} - m_I\ddot{\theta} + m_S\ddot{u} = Q + m_z(x, t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь введены обобщенные функциональные массовые характеристики КС

$$[m_A, m_S, m_I](x) = \sum_{k=1}^s \rho_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA, \quad (2.4)$$

характеристики жесткости  $\beta$  и вязкости  $c$  основания.

Основную компоненту тензора напряжений для  $k$ -й фазы представим на основе расчетной модели

$$\sigma_x^{(k)}(\varepsilon, t) = \sum_{i=0}^r p_{k,i}^\sigma f_{\varepsilon,i}(\varepsilon) + \eta_k \dot{\varepsilon} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon(x, y, t) = \varepsilon_0(x, t) - \kappa(x, t)y - \alpha_k T_k(x, y) \quad (2.6)$$

где  $f_{\varepsilon,i}$  ( $i=0, \dots, r$ ) – набор гладких базисных функций (БФ), определенных на  $\varepsilon \in \Pi_\varepsilon^i \in \Pi_\varepsilon$ ,  $p_{k,i}^\sigma \in [p_{k,i}^{\sigma+}, p_{k,i}^{\sigma-}]$  – числовые параметры для областей растяжения и сжатия;  $T_k(x, y)$  – функция изменения температуры в пространстве  $k$ -й фазы.

Модель (2.5) может формулироваться на основе а) глобальных одно- или разнотипных БФ, заданных на единой области  $\Pi_\varepsilon^i = \Pi_\varepsilon$  и б) локальных БФ, заданных на непересекающихся подобластях  $\Pi_\varepsilon^i \in \Pi_\varepsilon$ .

Касательные напряжения получены в виде

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y, t) = \frac{Q(x, t)}{b_k(x, y)} \frac{f_\tau(y)}{F_\tau}, \quad F_\tau = \int_{y_1}^{y_{s+1}} f_\tau dy \quad (2.7)$$

из условий динамического равновесия с применением аппроксимации погонной сдвигающей силы, заданной безразмерной функцией  $f_\tau(y)$ , удовлетворяющей условиям на поверхности КС.

В случае физически линейного деформирования (п. 4.1) найдены точные (в рамках принятых допущений) зависимости компонент напряжений от всех внутренних силовых факторов, поверхностных нагрузок и температуры. В частных случаях из них вытекают формулы В.В. Васильева, В.И. Сливкера, Д.И. Журавского, С.П. Тимошенко, В.Д. Тарабасова.

Дифференциальные физические зависимости для КС, связывающие обобщенные деформации, их скорости с интегральными силовыми факторами и температурой представим в квазилинейном виде

$$\begin{cases} \bar{D}_A \varepsilon_0 - \bar{D}_S \kappa + V_A \dot{\varepsilon}_0 - V_S \dot{\kappa} = N - N_T - N_{T\eta}, \\ -\bar{D}_S \varepsilon_0 + \bar{D}_I \kappa + V_S \dot{\varepsilon}_0 - V_I \dot{\kappa} = M - M_T - M_{T\eta}, \\ \gamma_0 D_Q + \dot{\gamma}_0 V_Q = Q, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$[\bar{D}_A, \bar{D}_S, \bar{D}_I](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} [1, y, y^2] \frac{f_{\varepsilon i}(\varepsilon)}{\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k} dA, \quad (2.9)$$

$$[V_A, V_S, V_I](x) = \sum_{k=1}^s \eta_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA, \quad (2.10)$$

$$[N_T, M_T](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \alpha_k \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} [-1, y] \frac{f_{\varepsilon i}(\varepsilon) T_k(x, y)}{\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k} dA, \quad (2.11)$$

$$[N_{T\eta}, M_{T\eta}](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \alpha_k \eta_k \sum_{i=0}^r \iint_{A_k} [-1, y] \dot{T}_k(x, y) dA. \quad (2.12)$$

$$D_Q(x) = \frac{F_{\tau}^2}{\sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_{\tau}^2}{b_k G_k (1 - \omega_k)} dy}, \quad V_Q(x) = \frac{F_{\tau}^2}{\sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_{\tau}^2}{b_k \eta_{\tau k}} dy}. \quad (2.13)$$

Здесь для сечения КС введены: секущие жесткостные характеристики (ЖХ) продольного деформирования (2.9), вязкостные характеристики продольного деформирования (2.10), массовые характеристики (2.4), сдвиговая жесткость и вязкость (2.13);  $\omega_k(\gamma_{yx})$  – функция Ильюшина, использованная в выражении  $\tau_{yx}^{(k)} = G_k (1 - \omega_k) \gamma_{yx}$ ,  $\eta_{\tau k}$  – сдвиговая вязкость.

Хорошие результаты в плане получения структурированных физических соотношений и универсального решения дает модель (2.5), основанная на степенных БФ с натуральными показателями

$$\sigma_x^{(k)}(\varepsilon, t) = \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\sigma} \varepsilon^i + \eta_k \dot{\varepsilon}. \quad (2.14)$$

В этом случае при силовом воздействии в уравнениях системы (2.8) имеем разложения силовых факторов по степеням обобщенных деформаций

$$\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i c_{ij} D_{ij} \varepsilon_0^{i-j} \kappa^j + V_A \dot{\varepsilon}_0 - V_S \dot{\kappa} = N, \quad -\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i c_{ij} D_{ij+1} \varepsilon_0^{i-j} \kappa^j - V_S \dot{\varepsilon}_0 + V_I \dot{\kappa} = M \quad (2.15)$$

Соотношения (2.15) содержат ЖХ сечения высших порядков –  $i$ -го физиче-

ского и  $j$ -го геометрического порядков

$$D_{ij}(x) = \sum_{k=1}^s p_{k,i}^\sigma \iint_{A_k} y^j dA = \sum_{k=1}^s D_{ij}^{(k)}, \quad (2.16)$$

$c_{ij}$  ( $j = 0, \dots, i$ ) – коэффициенты биномов Ньютона  $(\varepsilon_0 - \kappa)^i$ . Секущие характеристики (2.9) через характеристики (2.16) определяются выражениями

$$[\bar{D}_A, \bar{D}_S, \bar{D}_I](x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{i-1} c_{ij} [D_{ij}, D_{i,j+1}, D_{i,j+2}] \varepsilon_0^{i-j-1} \kappa^j.$$

Модель (2.14) и система уравнений (2.15) обобщают многие известные частные случаи: жестко-пластического, линейно упругого (в том числе – разномодульного), линейно-вязкоупругого деформирования, деформирования по степенной зависимости Герстнера  $\sigma = E\varepsilon + p_2\varepsilon^2$ , кубической  $\sigma = E\varepsilon + p_3\varepsilon^3$  и др.

2.3. Для физически и геометрически нелинейно деформируемой (ФН и ГН) плоской композитной стержневой системы получены уравнения движения, геометрические и физические соотношения при кратковременных термосиловых и кинематических воздействиях. Разрешающее уравнение динамики представлено в квазилинейной форме метода перемещений

$$\mathbf{M}_W \ddot{\mathbf{W}}(t) + \mathbf{R}_V \dot{\mathbf{W}}(t) + \mathbf{R}_W \mathbf{W}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_{Tt} \quad (2.17)$$

с переменными матрицами: жесткости  $\mathbf{R}_W(\mathbf{W}) = \mathbf{A}_S(\mathbf{W})[\mathbf{B}(\mathbf{W})]^{-1} \mathbf{A}_W(\mathbf{W})$ , вязкого сопротивления  $\mathbf{R}_V(\mathbf{W}) = \mathbf{A}_S(\mathbf{W})[\mathbf{B}_V]^{-1} \mathbf{A}_W(\mathbf{W})$ , инерции  $\mathbf{M}_W$  и векторами внешних воздействий  $\mathbf{F}(t)$ ,  $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{F}_T$ ,  $\mathbf{F}_{Tt}$ . Матрица жесткости системы формируется на основе использования секущих матриц податливости КС (2.18):  $\bar{\mathbf{B}}_j =$

$$\begin{bmatrix} \int_l \frac{\bar{d}_I + v_h \bar{d}_S}{\bar{D}_{I,red}} dx & \int_l \frac{(l-x)\bar{d}_S + \theta_h \bar{d}_I}{l\bar{D}_{I,red}} dx & \int_l \frac{x\bar{d}_S - \theta_h \bar{d}_I}{l\bar{D}_{I,red}} dx \\ \int_l \frac{l-x}{l} \cdot \frac{\bar{d}_S + v_h}{\bar{D}_{I,red}} dx & \int_l \left[ \frac{l-x}{l} \cdot \frac{l-x + \theta_h \bar{d}_S}{l\bar{D}_{I,red}} + \frac{1}{l^2 D_Q} \right] dx & \int_l \left[ \frac{l-x}{l} \cdot \frac{x - \theta_h \bar{d}_S}{l\bar{D}_{I,red}} - \frac{1}{l^2 D_Q} \right] dx \\ \int_l \frac{x}{l} \cdot \frac{\bar{d}_S + v_h}{\bar{D}_{I,red}} dx & \int_l \left[ \frac{x}{l} \cdot \frac{l-x + \theta_h \bar{d}_S}{l\bar{D}_{I,red}} - \frac{1}{l^2 D_Q} \right] dx & \int_l \left[ \frac{x}{l} \cdot \frac{x - \theta_h \bar{d}_S}{l\bar{D}_{I,red}} + \frac{1}{l^2 D_Q} \right] dx \end{bmatrix}$$

с компонентами, зависящими от перемещений  $v_h$ ,  $\theta_h$  и величин  $\bar{d}$ ,  $\bar{D}$ , определяемых жесткостными характеристиками. Аналогично, при заменах величин  $\bar{D}_\Omega \rightarrow V_\Omega$ ,  $\Omega \in [A, S, I, Q]$  формируется матрица вязкости  $\mathbf{B}_{Vj}$ .

2.4. Для металлических термочувствительных материалов при длительных воздействиях в условиях ползучести на основе способа Мак-Ветти разработана реологическая модель со скачком деформации ползучести (МПСД)

$$\varepsilon(t, T, \sigma) = \varepsilon_e(T, \sigma) + \varepsilon_c^{(0)}(T, \sigma) + \eta(T, \sigma)t, \quad (2.19)$$

содержащая три компоненты деформации:  $\varepsilon_e$  – мгновенную упругую,  $\varepsilon_c^{(0)}$  – фиктивного скачка ползучести и деформацию при установившейся скорости  $\eta$ . В сравнении с моделью установившейся ползучести (МУП) введение скачка ползучести, учитывающего деформацию первой стадии ползучести, позволяет для ряда материалов и условий нагружения существенным образом уточнить деформированное состояние при длительной эксплуатации.

Аппроксимация скачка ползучести и постоянной скорости выполнялась с применением функций напряжений: Людвига, Нортон, Содерберга, Надаи. Наилучшие результаты были получены для степенных функций

$$\varepsilon_c^{(0)} = B_\varepsilon(T)\bar{\sigma}^{n_\varepsilon(T)}, \quad \eta = B_\eta(T)\bar{\sigma}^{n_\eta(T)}, \quad (2.20)$$

содержащих по два функциональных параметра для термочувствительного материала, аппроксимированные выражениями экспоненциального типа  $p(T) = p_0 \exp(p_1 T)$ ,  $p \in [B_\varepsilon, n_\varepsilon, B_\eta, n_\eta]$ .

2.5. На базе МПСД получены расчетные зависимости для КС и составленных из них произвольных плоских систем. Расчеты в упругом состоянии (УС), в состоянии скачка ползучести (СП) и в процессе ползучести с постоянной скоростью (УП) выполняются по однотипным линеаризованным зависимостям. Так, напряжение в состоянии СП представлено в форме

$$\sigma_k = E_{\varepsilon, k} \varepsilon_c^{(0)}, \quad E_{\varepsilon, k}(\varepsilon_c^{(0)}) = \sigma_0 B_{\varepsilon, k}^{-1/n_{\varepsilon, k}} \cdot \left| \varepsilon_c^{(0)} \right|^{1/n_{\varepsilon, k} - 1}, \quad (2.21)$$

что позволяет получить квазилинейные соотношения для интегральных силовых факторов и матричное физическое равенство с матрицей податливости, зависящей от переменных жесткостных характеристик. Решение по уточнению деформаций СП состояния выполняется итерационно.

Аналогичные соотношения для  $k$ -го материала, КС и системы с точностью до обозначений переменных выполняются и для УП состояния.

Параметры деформированного состояния в произвольный момент времени  $t$  находятся суммированием результатов трех состояний

$$\Delta(x, t) = \Delta_e + \Delta_c^{(0)} + \dot{\Delta}_c^{(c)} \cdot t, \quad \Delta \in [u, v, \theta, \varepsilon_0, \kappa]. \quad (2.22)$$

2.6. Наряду с (2.19) в расчетах КС в условиях ползучести применены и другие модели. Так, на базе теории упрочнения  $\dot{\varepsilon}_c \varepsilon_c^{\alpha(T)} = f(\sigma, T)$  построена расчетная модель КС, в которой напряжение определяется выражением

$$\sigma_k = \text{sgn}(\varepsilon_c) \sigma_0 \left[ \frac{|\varepsilon_c|^{(1+\alpha_k)}}{(1+\alpha_k) B_k \bar{t}} \right]^{1/n_k} \quad (2.23)$$

с параметрами  $B_k(T)$ ,  $\alpha_k(T)$ , зависящими от температуры.

Для неметаллических материалов с привлечением наследственной теории Больцмана-Вольтерра разработана расчетная модель для решения начальной задачи о напряженно-деформированном состоянии КС и системы.



2.7. В постановках обратных задач ведены понятия предельных состояний КС. С этой целью на основе ограничений на деформации для различных видов воздействий и условий нагружения сформулированы соответствующие *непрерывно-дискретные многоточечные критерии* (НДРК) реализации расчетных предельных состояний в КС.

2.7.1. При статическом нелинейном термоупругом деформировании ограничение на деформации записывается в виде

$$\text{sgn}(\varepsilon_x)[\varepsilon_0(x) - \kappa(x)y - \alpha_k T(x, y)] \leq \varepsilon_{x, \text{adm}}^{(k)\pm}, \quad (k = 1, \dots, s), \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{x, \text{adm}}^{(k)\pm} = \min_{j=1, \dots, n_R} \varepsilon_{x, \text{adm}, j}^{(k)\pm}, \quad \varepsilon_{x, \text{adm}, j}^{(k)\pm} = \varepsilon_{x, u, j}^{(k)\pm} / k_{u, j}^\varepsilon. \quad (2.25)$$

где  $\varepsilon_{x, \text{adm}, j}^{(k)\pm}$ ,  $k_{u, j}^\varepsilon > 1$  – допустимый уровень деформации растяжения и сжатия при оценке  $j$ -го предельного состояния материала  $k$ -й фазы и коэффициент запаса, введенный по отношению к предельной деформации  $\varepsilon_{x, u, j}^{(k)}$ .

Значения предельных деформаций могут а) носить условный характер, б) выявляться на основе формулировок некоторых физических предельных состояний, например, – по условию прочности с обобщенным эквивалентным напряжением  $\sigma_{\text{eqv}}^{(k)} = \Psi(\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}) \leq \sigma_s^{(k)}$  согласно принятой теории прочности. Таким образом, несмотря на принятую для удобства квазиодноосную форму записи, критерий (2.24) с переменной правой частью описывает и сложные напряженные состояния при учете различных компонент тензора напряжений.

**Определение 1.** Обобщенное предельное состояние на участке КС, занимающего пространство  $X, Y, Z$ , при нелинейном стационарном термоупругом деформировании реализуется в том случае, если условие (2.24) выполняется в форме строгого равенства

$$\text{sgn}(\varepsilon_x)[\varepsilon_0(x) - \kappa(x)y - \alpha_k T(x, y)] = \varepsilon_{\text{adm}}^{(k)\pm}, \quad (2.26)$$

непрерывно по продольной координате  $x \in X$ , в дискретном числе уровней  $n_y$  по поперечной координате  $y = \xi_1, \dots, \xi_{n_y} = Y_* \in Y$ . Для всех иных точек  $x \in X$ ,  $y \notin Y_*$  условие (2.24) реализуется в форме неравенства.

Кратность критерия в зависимости от условий задачи принимает значения  $n_y \in [1, s + 1]$ , при этом критерий именуется как  $n_y$ -точечный НДРК. Выполнено обобщение опр. 1 на случай многовариантного воздействия.

2.7.2. В общем случае удовлетворение равенств (2.26) требует изменения физической структуры стержня. Оценка ее эффективности в плане повышения кратности НДРК выполняется с использованием двух критериев  $0 \leq K \leq 1$ :

$$K_\varepsilon = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \frac{1}{A_k \varepsilon_{\text{adm}}^{(k)\pm}} \left[ \varepsilon_0 A_k - \kappa S_k - \alpha_k \iint_{A_k} T_k dA \right] \rightarrow \max, \quad (2.27)$$

$$K_U = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \frac{1}{\sum_{i=0}^r \frac{p_{ki}}{i+1} \epsilon_{\text{adm}}^{(k)\pm} A_k} \left( \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i \frac{c_{ij}}{i+1} D_{ij} \tilde{\epsilon}_{0k}^{i-j} \tilde{\kappa}_k^j + I_{\eta k} \right) \rightarrow \max, \quad (2.28)$$

$$I_{\eta k} = \eta_k \iint_{A_k} \int_t (\dot{\epsilon}_0 - \dot{\kappa}y)^2 dt dA, \quad \tilde{\epsilon}_{0k} = \epsilon_0 - \alpha_k p_{0,k}^T, \quad \tilde{\kappa}_k = \kappa + \alpha_k p_{1,k}^T.$$

Первый основан на суммарной интегральной оценке относительного уровня деформации, второй – на оценке удельной энергии деформации композитного сечения при учете  $\sigma_x$  – основной компоненты тензора напряжений. В квазистационарных процессах имеем  $I_{\eta k} = 0$ , а при неизменных скоростях  $\dot{\epsilon}_0, \dot{\kappa} - I_{\eta k} = \eta_k t (\dot{\epsilon}_0^2 A_k - 2\dot{\epsilon}_0 \dot{\kappa} S_k + \dot{\kappa}^2 I_k)$ .

Критерии (2.27), (2.28) дают возможность: а) выполнять оценку эффективности структур КС, осуществляя отбор наиболее адаптированных структур к реализуемым типам деформированных состояний; б) для заданных неоднородных структур осуществлять отбор наилучших (адаптированных к физической структуре) деформированных состояний, что используется в решениях обратных задач рационального профилирования композитных систем, в которых геометрические функции являются регуляторами деформированного состояния.

2.7.3. Введены в рассмотрение КС с заданными свойствами деформирования, для которых обобщенные деформации  $\epsilon_0, \kappa$  принимают заданные значения  $\epsilon_{0,\text{adm}}, \kappa_{\text{adm}}$  или удовлетворяют условию связи  $\psi_\epsilon(\epsilon_0, \kappa) = 0$ . Для таких стержней одно из равенств (2.26) в опр. 1 заменяется кинематическим условием. Принятие нулевых значений  $\epsilon_{0,\text{adm}} = 0, \kappa_{\text{adm}} = 0$  позволяет создавать проекты профилированных соответствующим образом КС, имеющих *нерастяжимые (несжимаемые) и неискривляемые* участки.

2.7.4. При динамическом нелинейно упругом деформировании величина деформации  $\epsilon_u^{(k)\pm}$ , отвечающая предельному напряжению  $\sigma_u^{(k)\pm}$ , при текущем уровне НДС может быть учтена в критерии (2.24) в форме

$$\epsilon_u^{(k)\pm}(\epsilon, \dot{\epsilon}) = \frac{\mu_\tau \sigma_u^{(k)\pm}}{\bar{E}_k(\epsilon) \Psi_k(\epsilon, \dot{\epsilon})}, \quad (2.29)$$

где  $\bar{E}_k(\epsilon) = \sum_{i=0}^r p_{k,i}^\sigma \epsilon^{i-1}$  – переменный секущий модуль, а функциональные безразмерные коэффициенты  $\Psi_k(\epsilon, \dot{\epsilon}) = 1 + \eta_k \dot{\epsilon} / (\bar{E}_k \epsilon)$  и  $\mu_\tau \leq 1$  учитывают вязкость материала и влияние касательных напряжений.

Учет предельных деформаций в форме (2.29) требует выполнения уточняющих шагов при решении нелинейных динамических обратных задач с учетом свойств вязкости фазовых материалов. Записав на основе (2.29) условие-ограничение для деформации (2.24), расширенного на временное пространство

$$|\varepsilon_0(x,t) - \kappa(x,t)y - \alpha_k T(x,y)| \leq \varepsilon_{x,\text{adm}}^{(k)\pm}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \varepsilon_{x,u,j}^{(k)} / k_{u,j}^\varepsilon, \quad (k=1, \dots, s), \quad (2.30)$$

сформулируем понятие предельного состояния для динамических задач.

**Определение 2.** В нелинейно деформируемом термоупругом КС, занимающем пространство  $X, Y, Z$  при динамическом силовом воздействии, удовлетворяющем в интервале времени  $t \in [0, T]$  ограничению (2.30), на участке  $x \in X_* \in X$  реализуется обобщенное предельное состояние в том случае, если в критический момент времени  $t_* \in [0, T]$  ограничение (2.30) выполнено в форме строгого равенства

$$|\varepsilon_0(x, t_*) - \kappa(x, t_*)y - \alpha_k T(x, y)| = \varepsilon_{x,\text{adm},k}^\pm(\varepsilon, \dot{\varepsilon}), \quad (2.31)$$

непрерывно по продольной координате  $x \in X_*$ , в дискретном числе уровней  $n_y$  по поперечной координате  $y = \xi_1, \dots, \xi_{n_y} = Y_* \in Y$  в сочетании с удовлетворением условия максимума

$$|\Psi_k(x, y, t_*) \varepsilon_x^{(k)}(x, y, t_*, T)| = \max_t |\Psi_k(x, y, t) \varepsilon_x^{(k)}(x, y, t, T)|. \quad (2.32)$$

Во всех иных точках  $y \notin Y_*, x \in X_*$  в момент времени  $t_*$ , а также в точках  $y \in Y_* \cup x \in X_*$  в иные моменты времени  $t \neq t_*$  из  $t \in [0, T]$ , условие (2.30) выполняется со знаком неравенства.

Опр. 2 дает формулировку НДРК для динамически нагруженного КС, позволяющего решать начально-краевые задачи нахождения  $n_y \leq s + 1$  геометрических функций границ фаз. В задачах о несущей способности систем с заданной геометрией, физической структурой при однопараметрическом нагружении критерий (2.30) является одноточечным.

2.7.5. Сформулированы условия реализации допредельных состояний при длительном нагружении на основе: а) энергетического критерия Ю.В. Немировского

$$U_c^{(0)}(T) + U_c(t, T) \leq U_{k*}(T), \quad (2.33)$$

( $U_{k*}$  – предельная удельная энергия деформации, накопленная к моменту разрушения); б) деформационного критерия длительной прочности

$$\max_{x,y,k} \varepsilon_k^{(c)}(x, y, t, T) \leq \varepsilon_{k*}(\sigma_k, T) \quad (2.34)$$

( $\varepsilon_{k*}$  – деформация, соответствующая началу третьей стадии ползучести); в) условных критериев ограничения перемещений  $\delta(x, t) \in [u, v, \theta]$  и деформаций

$$\max_x \delta(x, t) \leq \delta_{\text{adm}}, \quad \int_l \delta(x, t) dx \leq \Omega_{\text{adm}}, \quad \max_{x,y,k} \varepsilon_k(x, y, t) \leq \varepsilon_{k,\text{adm}}. \quad (2.35)$$

На основе ограничений (2.33)–(2.35) сформулированы определения предельных состояний и НДРК, реализуемого непрерывно по продольной координате  $x \in X_*$  в дискретном числе уровней  $n_y$  по поперечной координате  $y = \xi_1, \dots, \xi_{n_y} = Y_* \in Y$  при условии длительного нагружения.

**Третья глава** посвящена методам решения статических задач нелинейного деформирования систем с композитными стержнями.

3.1. На основе общей расчетной модели (2.3), (2.8), (2.17) выполнена постановка краевых задач ГН и ФН статического термоупругого деформирования КС и системы. Используются последовательные шаги уточнения секущих ЖХ (2.9), (2.13), НДС и формируемых на их основе матриц: податливости (2.18), статической  $\mathbf{A}_S(\mathbf{W})$  и геометрической  $\mathbf{A}_W(\mathbf{W})$ .

В результате анализа использования в (2.14) различных нелинейных БФ показано, что наличие в структурно неоднородных средах (КС и системах) отдельных фаз, выполненных из нелинейно деформируемых материалов, может, в случае применения линейных моделей, приводить к существенным погрешностям НДС. В рассмотренном дерево-пластмассовом КС игнорирование нелинейности деформирования древесины привело к погрешностям в напряжениях на величины порядка 20–28% во всей неоднородной структуре. Показано, что наиболее простым и достоверно описывающим НДС при эксплуатационных нагрузках в таких случаях является закон разномодульного деформирования, получаемый в результате принятия в (2.14)  $r = 1$ ,  $p_{k,0}^\sigma = 0$ ,  $p_{k,0}^{\sigma^+} = E_k^+$ ,  $p_{k,0}^{\sigma^-} = E_k^-$ .

3.2. Выполнена постановка задач рационального проектирования произвольных композитных стержневых систем при заданном воздействии, в каждом поперечно-слоистом КС которых, требуется определить частный набор геометрических функций (число их определяется степенью кратности расчетного критерия) из полного набора

$$r_k(x), \quad r \in [b, h], \quad (k = 1, \dots, s), \quad (3.1)$$

внутренние силовые факторы и перемещения, удовлетворяющие основным соотношениям композитной системы, граничным условиям и ограничениям

$$r_k \geq r_{\min}, \quad r \in [b, h]. \quad (3.2)$$

В качестве расчетного критерия использован НДРК (опр. 1).

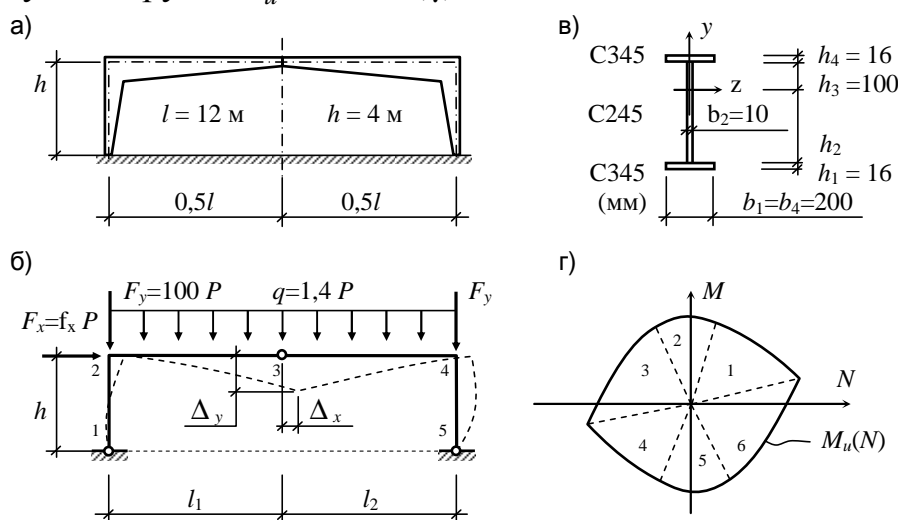
Получены разрешающие соотношения для различных наборов варьируемых параметров (функций) и степени кратности критерия  $n_y \in [1, s + 1]$ . Расчетный критерий (2.24) позволяет учитывать предельные состояния по прочности, локальной жесткости и условные предельные состояния.

Разработан двухэтапный численно-аналитический метод решения задачи рационального проектирования при последовательном уточнении варьируемых функций и параметров состояния системы [68]. Рассмотренная постановка может использоваться для решения задач усиления конструкций, посредством добавления к элементам исходной системы наружных слоев-накладок, имеющих расчетную конфигурацию и расположение.

3.3. Для произвольной плоской композитной системы с профилированными стержнями из жестко-пластических материалов с использованием теорем предельного равновесия разработан метод и автоматизированный матричный алгоритм расчета предельной несущей способности и схемы пластического разрушения при однопараметрическом нагружении. Для

описания деформирования системы в расчетной модели с локальными БФ (2.14) применены параметры  $r = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $p_{k,0}^{\sigma^+} = \sigma_{k,s}^+$ ,  $p_{k,0}^{\sigma^-} = \sigma_{k,s}^-$ .

3.4. Для задачи нелинейной устойчивости композитной стержневой системы при однопараметрическом (с параметром  $P$ ) нагружении разработан численный метод решения, базирующийся на варьировании параметра нагруженности системы  $\gamma$ . При нелинейно-упругом деформировании метод позволяет с заданной точностью выявлять устойчивые ( $\partial P / \partial \gamma > 0$ ) и неустойчивые ( $\partial P / \partial \gamma < 0$ ) состояния, различные условные и физические предельные состояния системы, в том числе – предельное состояние при максимуме нагрузки  $P_u = \max P(\gamma)$ .

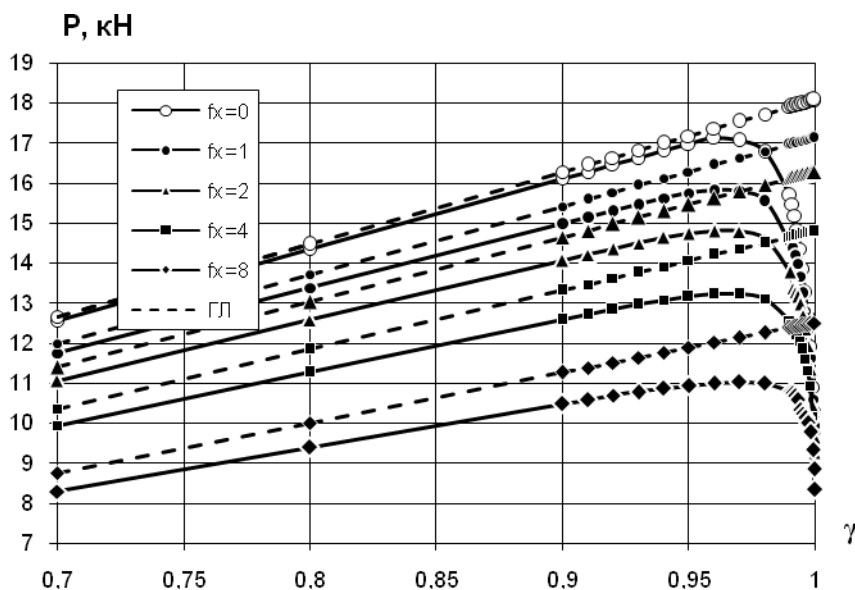


**Рис. 2.**  
Схема композитной рамы при однопараметрическом нагружении

Безразмерный параметр нагруженности  $\gamma$  системы представляет собой степень приближения напряженного состояния наиболее опасного неоднородного сечения к предельному состоянию (при оценке интегральных внутренних силовых факторов). В качестве таких состояний могут быть использованы различные условные и физические предельные состояния при ограничении деформаций или напряжений.

Исследовано деформирование рамы с композитными двутавровыми стержнями переменного сечения, выполненными из двух марок стали при идеально упругопластическом деформировании (рис. 2). На рис. 3 сплошными линиями показаны графики  $P(\gamma)$ , полученные нелинейным расчетом при различных коэффициентах  $f_x$  горизонтальной нагрузки  $F_x$ . В случае выполнения расчета в геометрически линейной постановке (пунктирные линии) погрешности предельной нагрузки при  $f_x = 0, 1, 2, 4, 8$  составили 5,5; 8,2; 9,9; 12; 13,7 (%).

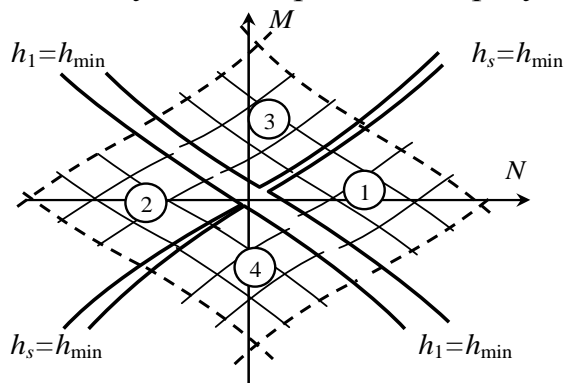
Анализ численных результатов решения прямых и обратных задач расчета композитных систем показал: а) необходимость учета факторов геометрической и физической нелинейности в задачах устойчивости, б) эффективность рационального профилирования стержней в плане повышения удельной несущей способности системы.



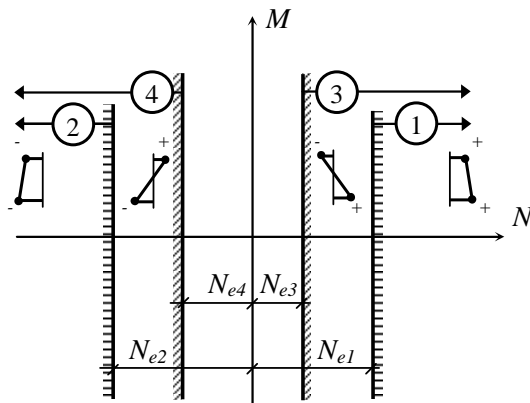
**Рис. 3.** Кривые равновесных состояний  $P(\gamma)$  при  $F_x = f_x P$

В четвертой главе исследованы особенности напряженных состояний рационально профилированных поперечно-слоистых стержневых систем.

4.1. При линейном статическом деформировании профилированного КС получены новые формулы компонент продольного нормального  $\sigma_x$  и поперечного касательного  $\tau_{yx}$  напряжений, учитывающие влияние внутренних силовых факторов  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ , нагрузок  $q_x$ ,  $m_z$  и температуры  $T_k(x, y) = p_{0,k}(x) + p_{1,k}(x)y$ . В представленных 9-и выражениях применены ЖХ (2.16) первого физического и 0, 1, 2-го геометрического порядков при  $p_{k,i}^\sigma = E_k$ . Тестирование формул на основе сопоставления с результатами опытов и уточненными теориями, в частности, методом начальных функций, дало удовлетворительные результаты.



**Рис. 4.** Области инвариантных деформаций  $\epsilon(y)$  при варьировании толщины  $h$  наружных слоев



**Рис. 5.** Области инвариантных деформаций  $\epsilon(y)$  при варьировании толщины  $h$  внутренних слоев

4.2. С использованием ограничений (3.2) выполнен анализ необходимых условий существования четырех типов решений задач рационального проектирования, выполненных на основе НДРК (опр. 1). При задании четырех возможных типов распределения деформации  $\epsilon(y)$  в сечении КС полу-

чены аналитические ограничения  $\Psi_i(M, N, r_{\min}) \leq 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) на силовые факторы. Геометрические интерпретации некоторых из полученных ограничений, идентифицирующих четыре области с инвариантными распределениями деформаций в композитном сечении, отражены на рис. 4, 5. Варьирование толщины наружных слоев дает диаграмму на рис. 4, для внутренних смежных слоев – рис. 5, а при изменении ширины  $b$  двух любых слоев диаграмма идентична показанной на рис. 4, но имеет прямые границы зон. В четырех основных областях определены изолинии удельной материалоемкости (на схемах не показаны) и основные внутренние силовые факторы, оказывающие главное влияние на материалоемкость стержней. В первой и второй областях таковыми являются продольные силы, а третьей и четвертой – изгибающие моменты.

4.3. Выполнены аналитические и численные решения задач рационального проектирования КС на основе НДРК при варьировании геометрических параметров внешних и внутренних слоев. Установлены особенности полученных проектов и даны рекомендации по их применению, а именно:

а) кусочность реализации расчетных критериев (2.26) в направлении продольной оси, границы выполнения которых определяются заданными внешними воздействиями и ограничениями (3.2). Активность указанных ограничений приводит к понижению степени кратности критериев;

б) эффективность применения критериев физической структуры (2.27) – (2.28) для оценки рациональности расположения фазовых материалов в КС;

в) для решений 3, 4 (изгибных) типов решений (рис. 4) наиболее адаптированными к возникающему напряженному состоянию являются поперечно-слоистые структуры (рис. 1, б), а для 1, 2 типа – рекомендуется использовать продольно-слоистые структуры (рис. 1, д);

г) возможность за счет рационального выбора физической структуры и геометрического профилирования снизить расход материалов до 35-40%;

д) предложенная методика решения задачи РП для КС заданной формы сечения с варьируемым смещением физического центра позволяет решать задачи поиска рационального очертания геометрических осей более простыми (по сравнению с вариационными) средствами.

4.4. На основе общей постановки задач рационального проектирования произвольных композитных стержневых систем (п. 2.7) разработан двухэтапный численно-аналитический итерационный алгоритм поиска геометрических функций (3.1) рациональным образом профилирующих ширину или толщину слоев КС системы при наличии заданных ограничений (3.2). В пределах итерационного шага предусмотрено разделение на две подзадачи – расчета и проектирования с варьированием и фиксацией на каждой из них одной из двух групп переменных – функций НДС и ВФ. Организованный таким образом алгоритм позволяет исключить сложные зависимости между функциями НДС и ВФ и получить решение задачи с требуемой точностью.

В примере рационального проектирования композитной рамы (рис. 6), имеющей стержни в форме составных неоднородных двутавров с использованием стали С245 и титанового сплава ВТ1, уровень допустимых деформаций  $\varepsilon_{x,adm}^{(k)}$  в (2.24) установлен по обобщенному условию прочности через эквивалентное напряжение (п. 2.7.1)

$\Psi = (1 + \phi_k) \sqrt{\sigma_x^2 + \beta_k \tau_{yx}^2} + (1 - \phi_k) |\sigma_x| - 2R_k \leq 0$ , где  $R_k$  – расчетное сопротивление  $k$ -го материала,  $\phi_k, \beta_k$  – безразмерные параметры ( $\phi_k = 1, \beta_k = 3$  – по Мизесу–Генки). Тогда в правой части (2.24) имеем деформацию

$$\varepsilon_{x,adm}^{(k)} = \frac{\mu_k R_k^\pm}{k_u^\varepsilon E_k}, \quad \mu_k(x, y) = \frac{(1 + \phi_k)}{2\phi_k} \sqrt{1 - \phi_k \beta_k \left( \frac{\tau_{yx}(x, y)}{R_k^\pm} \right)^2} + \frac{\phi_k - 1}{2\phi_k}. \quad (4.1)$$

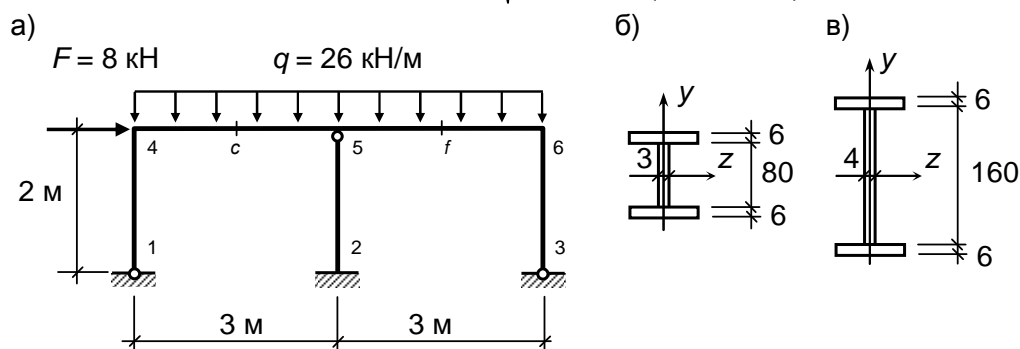


Рис. 6. Расчетная схема композитной рамы

Найденные рациональные законы (рис. 7) продольного профилирования ширины полок  $b_{j1}, b_{j3}$  при условии (3.2) в сочетании с выбором рационального расположения материалов по критерию (2.27) позволили снизить массу рамы на 44%, а стоимость материалов на 36% в сравнении с проектом рамы, имеющей призматические стержни той же структуры.

В диссертации также рассмотрен пример рационального проектирования рамной системы бóльшей размерности. В качестве прототипа взяты конструкции спортивной школы, описанной в кн. Харт Ф., Хенн В., Зонтаг Х. Атлас стальных конструкций. Многоэтажные здания / пер. с нем. – М.: Стройиздат, 1977. – 351 с. (п. 22, с. 89). Поперечная рама каркаса школы содержит 47 стержней.

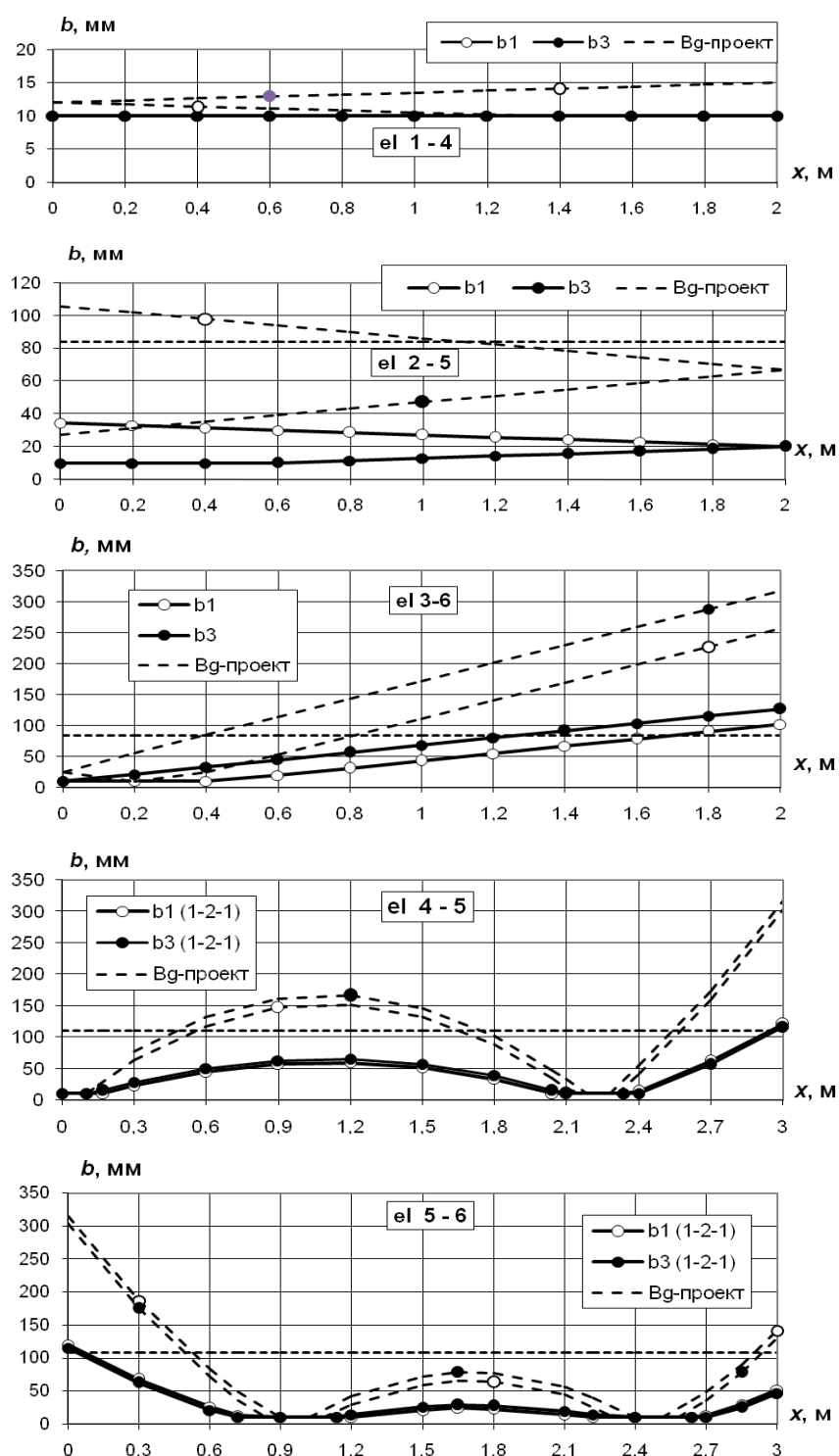
4.5. При многовариантном воздействии, после выполнения на итерации первого этапа – выявления НДС для всех заданных вариантов воздействий, решение для искомых геометрических функций каждого КС на этапе проектирования находится по условию максимума

$$r_k(x) = \max_i \left[ r_{k,\min}, r_{1k}(x), \dots, r_{ik}(x), \dots, r_{is_k}(x) \right], \quad (4.2)$$

где  $i = 1, \dots, i_s$  – номера сочетаний вариантов воздействий. Условие (4.2) позволяет также устанавливать для участка геометрической функции  $r_k(x)$  наиболее опасное расчетное сочетание воздействий. Результирующая кусочная кривая  $r_k(x)$  является внешней огибающей семейства одноименных



кривых  $r_{ik}(x)$  ( $i=1, \dots, i_s$ ), выявленных для всех сочетаний вариантов нагру-  
зОК.

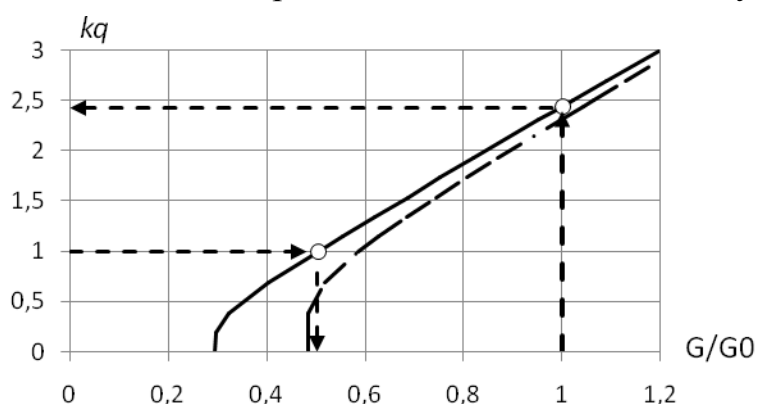


**Рис. 7.** Продольное профилирование ширины наружных слоев стоек и ригелей рамы со структурой Ст-ВТ-Ст. Сплошные линии –  $Vq$ -проект на основе НДРК 2, пунктирные линии –  $Vg$ -проект, частый пунктир – рама с призматическими стержнями

4.6. Исследовано деформирование композитных рационально профилированных на основе НДРК систем при *запроектных воздействиях*. Показано, что путем варьирования коэффициента запаса  $k_u^e \geq 1$  в расчетном критерии (2.24) реализуется возможность получения проектов обладающих как

повышенной прочностью и жесткостью, так и меньшим расходом материалов по сравнению с традиционными проектами.

На рис. 8 приведены графики (при  $b_{\min} = 30$  и  $50$  мм) зависимости массы рамы  $G$  от амплитуд нагрузок  $k_q$ . Из двух отмеченных точек нижняя соответствует  $Bq$ -проекту, полученному при заданном уровне расчетных нагрузок (рис. 6), а верхняя –  $Bg$ -проекту при массе, равной массе исходной системы с призматическими стержнями той же структуры.  $Bg$ -проект характеризуется перемещениями  $\Delta_{4x}$ ,  $\Delta_{cy}$ ,  $\Delta_{fy}$  соответственно на 14, 19 и 12 % меньшими и профилированием слоев, показанным на рис. 7 пунктирными линиями. Промежуточные проекты, заключенные между  $Bq$ - и  $Bg$ -проектами, образуют непрерывную серию *рекомендованных проектов*, из которых, в соответствии с практическими потребностями, могут быть выбраны системы с приоритетными свойствами по материалоемкости, жесткости, несущей способности.



**Рис. 8.** Изменение несущей способности  $kq$  в зависимости от массы системы  $G$  в интервале  $Bq$ - (нижняя точка) и  $Bg$ - (верхняя точка) проектами

4.7. Выполнена постановка задачи условной оптимизации композитной системы при варьировании геометрических функций (3.1) и структуры стержней. Разработан гибридный двухэтапный метод оптимизации, содержащий на первом этапе процедуру рационального проектирования при удовлетворении НДРК (опр. 1) и на втором – процедуру оптимизации геометрических параметров по условию минимума функционала стоимости материалов системы. Используются ограничения: по прочности и локальной жесткости в форме НДРК 2; по общей жесткости, параметрические и конструктивные. На этапах гибридного метода выполнено разделение варьируемых функций две группы – неизвестного и известного видов. Численные результаты оптимизации неоднородных рамных систем, пятислойные стержни которых составлены из сталей различных марок показали возможность сокращения массы материалов до 50-55% при максимальном увеличении степени кратности критерия до  $s + 1$ .

4.8. Предложен вариант решения проблемы поиска глобального минимума в многоэкстремальных задачах оптимального проектирования. С этой целью описан метод нахождения начальных проектов для итерационных алгоритмов оптимизации, основанный на решении вспомогательной задачи оптимизации при учете сокращенного комплекса ограничений – локальных ограничений (по прочности). Описан автоматизированный матричный ал-

горитм выявления полной серии начальных проектов при числе варьируемых параметров, равном числу ограничений первого этапа.

**Пятая глава** посвящена методам решения задач динамики композитных стержней и стержневых систем для динамических воздействий, параметры которых (интенсивность, амплитуда, скорость) допускают: а) неучет волновых процессов, б) игнорирование влияния параметров воздействий на физические характеристики материалов.

5.1. На основе общей расчетной модели КС из соотношений (2.3), (2.8) получена система дифференциальных уравнений в перемещениях

$$\begin{cases} (D_A u' - D_S \theta' + V_A \dot{u}' - V_S \dot{\theta}')' - \beta_{xx} u + \beta_{x\theta} \theta - c_{xx} \dot{u} + c_{x\theta} \dot{\theta} - \\ \quad - m_A \ddot{u} + m_S \ddot{\theta} = -q_x(x, t), \\ [D_Q(\theta - v') + V_Q(\dot{\theta} - \dot{v}')] - (N_{st} \theta)' + \beta_{yy} v + c_{yy} \dot{v} + m_A \ddot{v} = q_y(x, t), \\ (D_I \theta' - D_S u' + V_I \dot{\theta}' - V_S \dot{u}')' + \beta_{x\theta} u - \beta_{\theta\theta} \theta + c_{x\theta} \dot{u} - c_{\theta\theta} \dot{\theta} - \\ \quad - D_Q(\theta - v') - V_Q(\dot{\theta} - \dot{v}') - m_I \ddot{\theta} + m_S \ddot{u} = m_z(x, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

описывающая связанные продольно-поперечные колебания неоднородного линейно вязкоупругого стержня на вязкоупругом основании. Используемые в ней одиннадцать интегральных характеристик (2.4), (2.10), (2.13), (2.16) позволяют учитывать жесткостные, вязкостные, инерционные свойства КС. Разработаны методы решения начально-краевых задач динамики КС при воздействии нагрузок, изменяющихся по произвольным законам в пространстве и времени. В результате принятия для перемещений разложений в форме

$$u(x, t) = \sum_i U_i(x) T_i(t), \quad v(x, t) = \sum_i V_i(x) T_i(t), \quad \theta(x, t) = \sum_i \Theta_i(x) T_i(t) \quad (5.2)$$

рассмотрены способы построения решений однородной задачи: а) основанные на задании функции времени  $T_i(t) = \exp(\lambda_i t)$  и дальнейшем сведении системы уравнений (5.1) к системе шести уравнений первого порядка относительно функций  $U_i(x)$ ,  $V_i(x)$ ,  $\Theta_i(x)$  с представлением фундаментального решения через матрицант; б) основанные на использовании для функций  $U_i(x)$ ,  $V_i(x)$ ,  $\Theta_i(x)$  разложений по заданным координатным базисам, удовлетворяющим граничным условиям, и сведении задачи на основе метода Бубнова-Галеркина к системе уравнений второго порядка относительно функций времени

$$T_{\delta_j}(t), \quad (j = 1, \dots, j_\delta), \quad \delta \in [u, v, \theta]. \quad (5.3)$$

Показано получение из характеристического уравнения, в случае  $\lambda_{\min}(N_{cr}) = 0$ , динамического критерия устойчивости КС.

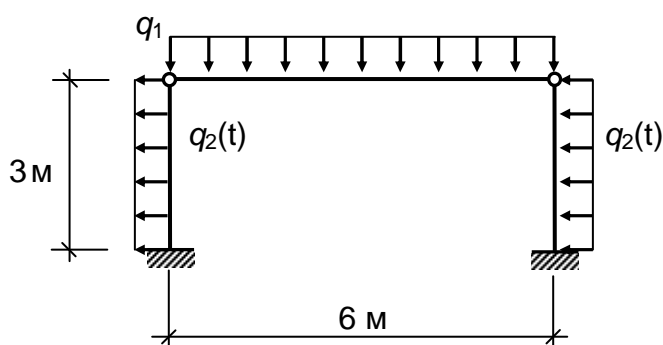
Частные решения при действии произвольных нагрузок  $q \in [q_x, q_y, m_z]$  построены на основе рядов Фурье

$$q(x,t) = \bar{q}(x)f(t), \quad f(t) = \sum_{j=0}^{j_m} (a_{qj} \cos j\omega_q t + b_{qj} \sin j\omega_q t), \quad (5.4)$$

$$\delta(x) = \sum_{j=0}^{j_m} [\bar{a}_{\delta j}(x) \cos j\omega_q t + \bar{b}_{\delta j}(x) \sin j\omega_q t], \quad \delta \in [u, v, \theta].$$

Рассмотрены нагрузки общего вида, взрывные (экспоненциального вида), мгновенно приложенные, гармонические.

5.2. Решение прямой динамической задачи (2.17) нелинейного деформирования произвольной системы выполнено с использованием метода Ньюмарка. Для иллюстрации разработанной методики выполнен динамический расчет модельной рамы (рис. 9) с абсолютно жестким невесомым ригелем и деревянными стойками прямоугольного сечения при действии статической нагрузки  $q_1$  и динамической  $q_2(t) = q_0 \exp(-t/t_0)$ .



**Рис. 9.**  
Схема рамы

Деформирование древесины представлено на основе гипотезы о разномодульности деформирования при помощи закона (2.14). При этом реальные диаграммы  $\sigma - \epsilon$  на ограниченных расчетных участках аппроксимированы линейными законами в пределах одного знака деформации.

При шаге  $\Delta t = 0,001$  с выявлены графики (рис. 10, а) изменения максимального прогиба в стойках  $v_{\max}(t)$  и конфигурации зон растяжения и сжатия, разделенных нейтральным слоем  $y_{n.s.}(x,t)$  (б), в моменты времени, соответствующие номеру шага  $i$ . Переменность величины  $y_{n.s.}(x,t)$  приводит к функциональности по пространству системы и времени характеристик жесткости.

Период первой волны затухающего процесса составил  $T = 0,053$  с, а наибольшее перемещение –  $v_{\max}(0,026) = 13,9$  мм. В сравнении со статическим перемещением от действия амплитудной нагрузки  $q_2(0)$ , равным 18,2 мм, это в 1,3 раза меньше, что, с одной стороны, объясняется быстрым падением нагрузки  $q_2(t)$  взрывного типа, а, с другой, – наличием инерционных и диссипативных свойств системы. При использовании единого модуля упругости  $E = 10$  ГПа, рекомендованного нормами проектирования, максимальные перемещения составило 15,0 мм (превышение на 7,9%). При дополнительном игнорировании нелинейных членов в уравнениях движения имеем перемещение 15,2 мм (превышение на 9,3%).

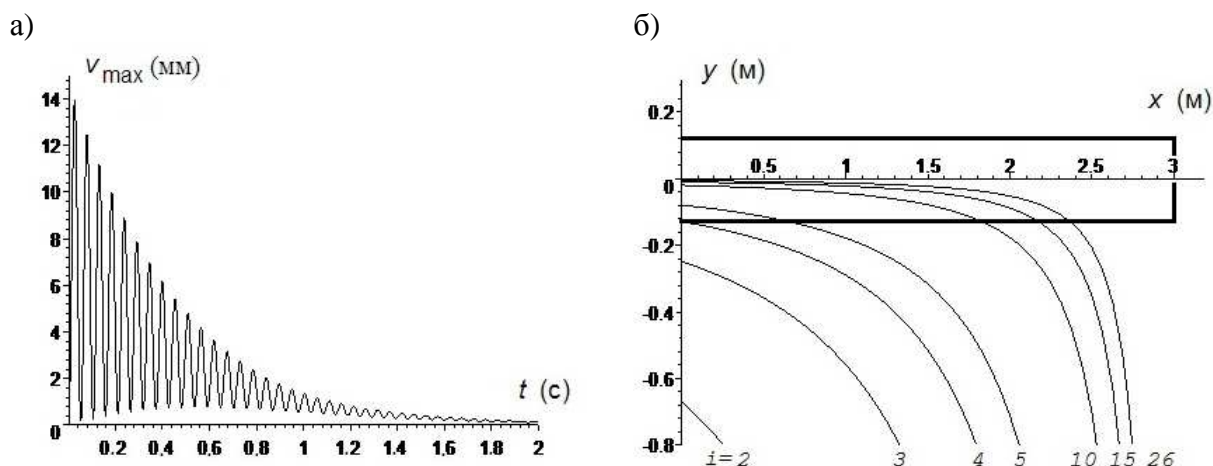


Рис. 10. (а) – изменение максимального прогиба в стойках, (б) – положение нейтрального слоя в стойках рамы на  $i$ -м шаге временной процедуры

Сравнительный анализ моделей деформирования показал, что модель разномодульного материала по сравнению с другими нелинейными моделями характеризуется существенно меньшей трудоемкостью и, вместе с тем, – с хорошей достоверностью отражает основные особенности нелинейного деформирования таких материалов, как древесина, пластмассы и др. Динамический отклик конструкций из таких материалов существенно зависит от структуры КС.

5.3. Построено численно-аналитическое решение задачи линейного динамического деформирования композитной системы при действии произвольных по пространству и времени нагрузок. При нахождении частного решения выполнено разложение нагрузок и перемещений в ряды Фурье. Приведен пример расчета рамы со стержнями переменного двутаврового сечения на собственные колебания с определением восьми первых частот и форм колебаний.

5.4. Для заданной линейно деформируемой системы с КС, испытывающей в интервале времени  $t \in [0, T]$  воздействие  $n_F$  систем динамических нагрузок с параметрами  $P = [p_1, \dots, p_{n_F}]$  с использованием расчетных критериев прочности, локальной и интегральной жесткости выполнены постановки обратных динамических задач, связанных с выявлением предельных значений параметров нагрузок  $P$ . Разработан метод заданных направлений, позволяющий свести многопараметрическую задачу к дискретной последовательности однопараметрических задач нахождения предельного параметра  $p_*$  нагрузок  $P_* = p_* \lambda$  в направлении вектора  $\lambda$ . Множество найденных точек при варьировании вектора  $\lambda$  образует искомую поверхность  $\Psi(p_1, \dots, p_{n_F}, \varepsilon_{k, adm}^\pm) = 0$ , ограничивающую область допустимых состояний системы.

5.5. На основе локальных расчетных динамических критериев выполнена постановка обратных задач проектного типа для стержневой композитной системы. Разработан итерационный двухэтапный метод поиска ра-

циональных геометрических функций (3.1) КС системы при ограничениях (3.2). Критерий максимума деформации (2.32) заменен на эквивалентный критерий максимума варьируемого параметра

$$r_k(x) = \max_t [r_{\min}, r_k(x, t)]. \quad (5.5)$$

На примере расчета двухэтажной рамы с поперечно-слоистыми КС при воздействии статических и гармонической нагрузки показана возможность за счет выбора рациональной физической структуры и продольного профилирования слоев получения экономии материалов до 40%.

**Шестая глава** посвящена методам решения прямых и обратных реологических задач расчета композитных стержневых систем в условиях длительного нагружения при учете фактора ползучести.

6.1. На основе моделей: со скачком деформации ползучести (2.19), (2.20), модели, построенной на базе теории упрочнения и модели линейного вязко-упругого деформирования получены физические соотношения для КС и системы, разработаны методы решения прямых реологических задач неустановившейся ползучести. На основе опытных данных выполнен подбор параметров модели со скачком деформации ползучести для различных термочувствительных материалов. Решенные задачи показали, что модель со скачком деформации ползучести характеризуется малой трудоемкостью и приемлемой точностью в условиях длительной эксплуатации.

6.2. С привлечением критериев условных (2.35) и физических предельных состояний (2.33), (2.34) выполнены постановки задач по установлению предельно допустимых сроков эксплуатации неоднородных систем при заданном термосиловом нагружении по МПСД. На примере двухпролетной рамы (рис. 6) показаны случаи существенного, до 2-х и более раз, завышения сроков допустимой эксплуатации, получаемых по модели установившейся ползучести с использованием ограничений по перемещениям и деформациям (2.35).

Показана а) методика выполнения численной оценки релаксационных процессов в неоднородных стержневых системах и б) существенное влияние на них физической структуры системы.

6.3. На базе непрерывно-дискретных многоточечных расчетных критериев в форме условного ограничения деформаций (2.35), а также по деформационному (2.34) и энергетическому (2.33) критериям длительной прочности выполнены постановки обратных задач рационального проектирования неоднородных стержневых систем. Разработаны методы поиска геометрических функций, профилирующих фазы в стержнях системы при заданных ограничениях (4.2).

Выполнен проектный расчет полимерной композитной балки, изготовленной из полипропилена и оргстекла. На три заданных момента времени получены законы РП наружных слоев из оргстекла, позволившие сократить массу балки до 42% при сохранении несущей способности и жесткости в течение заданного периода эксплуатации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана расчетная модель нелинейно деформируемого композитного стержня составленного из различных конструкционных материалов при широком спектре внешних воздействий и условий деформирования. Описание основной компоненты тензора напряжений переменным набором нелинейных базисных функций позволило гибко и с требуемой точностью описать законы деформирования различных фазовых материалов, единообразно формировать нелинейные физические соотношения для неоднородного стержня. Введенные в физические соотношения интегральные обобщенные массовые, вязкостные и жесткостные характеристики в сочетании с принятыми гипотезами обеспечивают необходимый уровень адекватности и приемлемую трудоемкость расчетной модели.

На основе расчетной модели композитного стержня разработана расчетная модель нелинейно деформируемой системы при соответствующем наборе внешних воздействий. Используемый в стержне аппарат базисных функций, в частности, – целых рациональных полиномов, позволяет алгоритмично формировать физические зависимости для стержневой системы, в том числе – на основе секущих характеристик.

2. Предложены новые непрерывно-дискретные расчетные критерии для решения обратных задач строительной механики неоднородных стержневых систем, включая задачи многовариантного нагружения, динамического и длительного воздействий. На их основе выполнены постановки основных видов обратных задач. Выявлены типы решений задач рационального проектирования при варьировании различных групп геометрических функций, характеризующиеся наличием в стержнях участков инвариантности распределения деформаций. Исходя из условий реализации полученных типов решений даны рекомендации по эффективности практического использования продольно- и поперечно-слоистых неоднородных структур, определены основные внутренние силовые факторы, оказывающие главное влияние на удельную материалоемкость и стоимость стержней.

Сформулированы деформационный и энергетический критерии численной оценки эффективности физической структуры композитных стержней, позволяющие а) выявлять рациональные способы адаптации структуры стержня к напряженно-деформированному состоянию, б) регулировать напряженно-деформированное состояние посредством изменения структурных параметров стержня.

3. Разработаны методы решения обратных задач рационального проектирования композитных стержневых систем, основанные на двухэтапных процедурах с разделенными группами варьируемых функций. Данный подход позволяет при широком спектре внешних воздействий находить проекты систем с рациональными законами профилирования, обладающие улучшенными показателями качества в сочетании с пониженным расходом материалов. Регулирование коэффициентов запаса в расчетных критериях по-

зволяет улучшать адаптационные свойства систем к запроектным воздействиям.

4. Разработан гибридный двухэтапный метод условной оптимизации композитных систем при варьировании геометрии и структуры стержней, содержащий на первом этапе процедуру рационального проектирования при удовлетворении расчетного критерия прочности (локальной жесткости) и на втором – процедуру оптимизации геометрических параметров по условию минимума функционала стоимости материалов системы с использованием ограничений по общей жесткости, параметрических и конструктивных. В итерационном методе применено разделение варьируемых функций две группы – неизвестного и известного видов. Численные результаты оптимизации неоднородных рамных систем показали возможность сокращения массы до 40-45% при максимальном увеличении степени кратности расчетного критерия.

Предложен вариант решения проблемы поиска глобального минимума в многоэкстремальных задачах оптимизации. С этой целью в итерационных алгоритмах оптимизации предложено использовать начальные проекты, выявляемые решением вспомогательной задачи при учете сокращенного комплекса ограничений – локальных ограничений (по прочности). Описан автоматизированный алгоритм выявления полной серии начальных проектов при числе варьируемых параметров, равном числу используемых на начальном этапе ограничений.

5. Разработан метод исследования устойчивости процесса нелинейного деформирования композитной стержневой системы, основанный на варьировании параметра нагруженности композитной системы. Метод позволяет выявлять различные предельные состояния системы, в том числе – состояние при максимуме нагрузки.

Анализ численных результатов решений прямых и обратных задач показал а) необходимость учета факторов геометрической и физической нелинейности в задачах устойчивости; б) эффективность рационального профилирования стержней в плане повышения удельной несущей способности системы, в) необходимость учета нелинейности деформирования для отдельных нелинейно деформируемых фазовых материалов в составе структурно неоднородных стержневых систем. Наиболее простой и достоверно описывающей НДС при эксплуатационных нагрузках в таких случаях является модель разномодульного деформирования.

6. Решены начально-краевые задачи динамики композитных систем при воздействии нагрузок, изменяющихся по произвольным законам в пространстве и времени. Для построения решений задач о собственных и вынужденных движениях применены способы, основанные на: разложениях перемещений по способу Фурье с заданием координатных либо временных функций, методе Бубнова-Галеркина, применении тригонометрических рядов.



7. Выполнена постановка линейных задач о выявлении предельных состояний композитных стержневых систем при воздействии нескольких систем динамических нагрузок с параметрами. Разработан метод заданных направлений, позволяющий в многопараметрическом пространстве нагрузок с привлечением заданных расчетных критериев находить предельные значения параметров нагрузок.

8. Разработаны методы решения прямых и обратных задач неустановившейся ползучести композитных стержневых систем с использованием различных реологических моделей, в том числе – модели ползучести с начальным скачком деформации для термочувствительного материала, характеризующиеся малой трудоемкостью и приемлемой точностью. На ее основе при использовании критериев длительной прочности и жесткости выполнены постановки задач рационального проектирования, установления сроков допустимой эксплуатации, несущей способности композитной стержневой системы.

9. Численные и аналитические исследования результатов решения задач рационального проектирования позволили вскрыть особенности полученных проектов и дать рекомендации по их применению, а именно: а) кусочность в направлении продольной оси реализации расчетных критериев, границы выполнения которых определяются заданными внешними воздействиями и ограничениями на варьируемые функции. Активность указанных ограничений приводит к понижению степени кратности критериев; б) целесообразность применения критериев оценки физической структуры для установления параметров композитных систем, наиболее адаптированных к возникающему напряженно-деформированному состоянию; в) области применения поперечно- и продольно-слоистых структур согласно типам решений задач рационального проектирования; г) возможность за счет рационального выбора физической структуры и геометрического профилирования снизить расход материалов до 45%; д) показано, что результирующая кривая искомой геометрической функции в задаче рационального проектирования при многовариантном воздействии представляет собой внешнюю огибающую семейства аналогичных кривых, выявленных для всевозможных сочетаний нагрузок.

\* \* \*

Разработанные в диссертации методы и принципы расчета неоднородных стержневых систем позволяют создавать рациональные и оптимальные проекты, обладающие набором существенно улучшенных качественных показателей. Подобные проекты следует рассматривать как *предельные*<sup>1</sup> или эталонные проекты. Реальные конструкции, характеризующиеся большим набором ограничений на геометрические и структурные параметры, в той или иной мере будут отличаться от найденных эталонов.

---

<sup>1</sup> Ляхович Л.С. Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений – Томск: Изд-во ТГАСУ, 2009.

Однако знание эталонных конструкций является необходимым и показывает направление дальнейшего технологического и структурного совершенствования системы.

Перспективы дальнейшей разработки темы, как относящейся к новому классу стержневых систем, довольно широки. Отметим здесь некоторые из них. 1) Расширение типов динамических воздействий с рассмотрением: сейсмических, ударных и циклических нагрузок. 2) Учет упругопластического деформирования материалов с возможностью появления зон разгрузки и вторичных пластических деформаций. Решение задач о приспособляемости композитной системы. 3) Учет влияния факторов внешней среды на физические характеристики материалов. 4) Постановка и решение задач надежности композитных систем. 5) Рассмотрение пространственного деформирования стержневой композитной системы.

Главной задачей, наиболее остро стоящей в настоящее время, является практическое использование композитных профилированных стержневых систем. Решение ее потребует продолжения данной тематики в серии работ по специальности 05.23.01 – «Строительные конструкции, здания и сооружения», в которых для «обоснования, исследования и разработки новых типов несущих конструкций» (согласно Паспорту специальности) должны быть использованы принципы, критерии и методы, предложенные в данной работе.

## **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Монография**

1. Немировский Ю.В., Мищенко А.В., Вохмянин И.Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем – Новосибирск: НГАСУ, 2004. – 488 с.

### **В ведущих рецензируемых научных журналах из перечня ВАК:**

2. Мищенко А.В. Итерационный способ решения нелинейных систем на основе анализа траектории сходимости процесса // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1988. - №4. – с. 20–23.

3. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Оптимальное проектирование равнопрочных слоистых рам // Изв. вузов. Строительство. – 1998. – № 1. – с. 21–30.

4. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Подклассы равнопрочных композитных рамных систем // Изв. вузов. Строительство. – 1998. – № 7. – с. 15–21.

5. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Типы равнопрочных проектов слоистых рам с переменной толщиной слоев // Изв. вузов. Строит-во. – 1999. №6. – с. 9-16.

6. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Проектирование и анализ эффективности равнопрочных слоистых рам различных типов // Изв. вузов. Строительство. – 1999. – № 9. – с. 12–20.

7. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Условия реализации общего решения задачи проектирования равнопрочных рам // Изв. вузов. Строительство. – 1999. – № 11. – с. 14–19.

8. Немировский Ю.В., Мищенко А.В. Проектирование конструкций со слоистыми стержнями переменного сечения при гармонических возмущениях // Изв. вузов. Строительство. – 2001. – №4. – с. 19–27.
9. Немировский Ю.В., Мищенко А.В. Проектирование рам со слоистыми стержнями при заданном сроке эксплуатации в условиях ползучести // Изв. вузов. Строительство. – 2001. – № 6. – с. 8–14.
10. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Собственные колебания плоских неоднородных рам с распределенными параметрами // Изв. вузов. Строительство. – 2003. – № 4. – с. 40–47.
11. Мищенко А.В. Оптимизация геометрии наружных слоев и внешних параметров слоистых стержней переменного сечения // Изв. вузов. Строительство. – 2003. – № 9. – с. 18–24.
12. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Слоистые стержневые конструкции из вязкоупругих материалов в условиях ползучести // Доклады АН ВШ РФ. – 2004. – № 1(3). – с. 45–54.
13. Мищенко А.В. Предельное состояние неоднородных слоистых сечений из идеально упругопластических материалов // Изв. вузов. Строительство – 2004. – №7. – с. 28-33.
14. Немировский Ю.В., Мищенко А.В. Влияние выбора материалов и структуры конструкции на пластическое деформирование и разрушение слоистых стержневых систем // Физическая мезомеханика. – 2004. – т. 7. – Спец. вып.: Материалы Междунар. конф. по физ. мезомеханике, компьютерн. конструированию и разраб. новых материал., 23-28 авг. 2004, Томск. – ч. 1. – с. 180–183.
15. Мищенко А.В. Предельное равновесие слоистых стержневых систем // Доклады АН ВШ РФ. – 2004. – № 7. – с. 28–33.
16. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Нелинейное деформирование и несущая способность слоистых стержневых систем // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – т. 11. – № 3. – с. 427–445.
17. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Оптимизация слоистых стержней при варьировании геометрических функций наружных и внутренних слоев // Изв. вузов. Строительство. – 2005. – № 3. – с. 19–24.
18. Мищенко А.В. Нормальные и касательные напряжения в классической теории расчета слоистых стержней // Изв. вузов. Строит-во, 2006. – № 9. – с. 89-95.
19. Мищенко А.В. Напряжения в слоистых стержнях переменного сечения // Механика композиционных материал. и констр., 2007. – т. 13. - № 4. – с. 537-547.
20. Мищенко А.В. Применение сжато-изогнутых стержней со смещенными центрами сечений в рамных конструкциях // Изв. вузов. Строит-во, 2007. - № 6. – с. 4-11.
21. Немировский Ю.В. Мищенко А.В. Проектирование слоистых стержневых конструкций из вязкоупругих материалов при заданном сроке эксплуатации // Механика композитных материалов. – 2007. – т. 43. – №5. – с. 581–594.
22. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Расчет и проектирование деревянных стержневых систем с учетом физической нелинейности // Строительная механика и расчет сооружений, 2007. – № 6. – с. 46 – 52.
23. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Установление срока допустимой эксплуатации слоистых стержней в условиях ползучести // Изв. вузов. Строительство. – 2008. – № 6. – с. 19–27.

24. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Модель ползучести металлов с начальным скачком деформации и функциональными константами материала // Изв. вузов. Авиационная техника, 2009. – № 1. – с. 20–24.
25. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Ползучесть однородных и слоистых рам на основе трехкомпонентной модели // Изв. вузов. Строит-во, 2009. – № 5. – с. 16–24.
26. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамический расчет сооружений башенного типа на ветровую нагрузку // Изв. вузов. Строит-во, 2009. – № 8. с. 3–10.
27. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамический расчет удлиненного слоистого тела вращения на ветровую нагрузку // Изв. вузов. Строительство, 2010. – № 1. – с. 11–18.
28. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Анализ напряженно-деформированного состояния длительно нагруженных рам со слоистыми стержнями // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 3. – с. 27–34.
29. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамический расчет конструкций из слоистых стержневых элементов // Вестник академии военных наук – 2010. - № 3 (32). – с. 131–135.
30. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Несущая способность слоистых стержней и рам при многопараметрическом динамическом воздействии (сообщение 1) // Изв. вузов. Строительство, 2011. – № 3. – с. 3 – 11.
31. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Несущая способность слоистых стержней и рам при многопараметрическом динамическом воздействии (сообщение 2) // Изв. вузов. Строительство, 2011. – № 4. – с. 3–9.
32. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамика слоистых рам из разносопротивляющихся материалов // Изв. вузов. Строительство, 2011. – № 11. – с. 10–19.
33. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Изв. вузов. Строительство, 2013. – № 4. – с. 3–12.
34. Мищенко А.В. Вариант выбора начальных проектов в итерационных алгоритмах оптимизации конструкций // Вестник ТГАСУ. – 2013. – № 3. – с. 165–174.
35. Мищенко А.В. Особенности упругопластического деформирования однородных и слоистых рационально профилированных балок при запроектных воздействиях. Сообщение 1 // Изв. вузов. Строительство, 2013. - № 7. – с. 12–21.
36. Мищенко А.В. Особенности упругопластического деформирования однородных и слоистых рационально профилированных балок при запроектных воздействиях. Сообщение 2 // Изв. вузов. Строительство, 2013. – № 9. – с. 5–14.
37. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Предельное состояние гибридных рамных систем // Вестник СибАДИ, 2013. – вып. 6 (34). – 50–56.
38. Мищенко А.В. Расчетная модель нелинейного динамического деформирования составных многофазных стержней // Вестник МГСУ, 2014. – № 5. с. 35–44.
39. Мищенко А.В. Нелинейное термоупругое деформирование многофазных стержней // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2014. – № 4. – с. 42–51.
40. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Решение задач неустановившейся ползучести для стержневых систем на основе модели с функциональными константами материалов // Известия АлтГУ. – 1-2 (81), 2014. – с. 52–56.

41. Мищенко А.В. Способ формирования нелинейных физических соотношений в прямых и обратных задачах расчета многофазных стержней // Вестник ЮУрГУ. Строительство и архитектура, 2014. – т. 14. – № 3. – с. 12–16.

**В других научных журналах и трудах конференций:**

42. Мищенко А.В. Метод исследования нелинейного деформирования и несущей способности композитных рам // Труды НГАСУ. – Новосибирск: НГАСУ, 1998. – вып. 1(1). – с. 53–63.

43. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Проектирование равнопрочных нерастяжимых и неискривляемых слоистых стержней / Проблемы оптимального проектирования сооруж.: Сб. докл. 2 Всерос. сем. – Новосибирск: НГАСУ, 1998. – с. 86 – 94.

44. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Проектирование слоистых равнопрочных рам / Материалы 2 Белорусского конгресса по теор. и прикл. механике «Механика-99». – Минск, Беларусь 28-30 июня 1999. – с. 235–236.

45. Мищенко А.В. Численное решение задачи о несущей способности нелинейно деформируемых плоских композитных стержневых систем / Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Труды XVI Межресп. конф., 6-8 июля 1999 г., Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – с. 107–111.

46. Немировский Ю.В., Мищенко А.В. Равнопрочные плоские рамы со слоистыми стержнями из металлов в условиях ползучести // Сооружения, конструкции, технологии и строительные материалы XXI века: Сб. докл. II межд. науч.-практ. конф.-шк.-сем. молодых ученых, аспирантов и докторантов. – Белгород: Изд-во БелГТАСМ, 1999. – ч. 1. – с. 74–84.

47. Мищенко А.В. Длительность эксплуатации рам со слоистыми стержнями из вязкоупругих материалов // Пробл. оптимального проектирования сооруж.: Сб. докладов III Всерос. сем. - Новосибирск: НГАСУ, 2000. – т. 2, с. 98–105.

48. Немировский Ю.В., Мищенко А.В., Марков А.Н. Прогнозирование времени безопасной эксплуатации металлических конструкций в условиях ползучести // Современные пробл. механики и прикл. матем.: Материалы школы-сем., посв. 70-летию проф. Д.Д. Ивлева, 25-30 сент. 2000 г. – Воронеж, 2000. ч. 2, с. 330–339.

49. Немировский Ю.В., Мищенко А.В. Синтез равнопрочных слоистых стержневых конструкций при гармонических воздействиях // Неоднородные конструкции: Труды XXX Уральского семинара. – Екатеринбург. – 2000. – с. 26–33.

50. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Создание современных эффективных слоистых равнопрочных стержневых конструкций // Ресурсо- и энергосбережение в реконструкции и новом строительстве: Научные труды II и III межд. конгр. – Новосибирск: НГАСУ, 2000. – с. 130–140.

51. Мищенко А.В. Рациональное проектирование слоистых стержневых конструкций при многовариантном воздействии // Доклады СО АН ВШ. – 2002. – № 1(6). – с. 75–83.

52. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Повышение эффективности равнопрочных слоистых стержневых конструкций путем регулирования полей усилий и нагрузок // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады IV Всерос. сем. – Новосибирск, 3-5 апреля 2002 г. – Новосибирск: НГАСУ, 2002. – с. 248–262.

53. Мищенко А.В. Оптимизация слоистых стержней при заданной частоте собственных колебаний // Численные методы решения задач теории упругости и пла-

стичности: Труды XVIII межресп. конфер., Кемерово, 1-3 июля 2003 г. – Новосибирск: Изд. «Нонпарель». – 2003. – с. 109 – 115.

54. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Оценка прочности комбинированных дерево-пластмассовых балок / Современные проблемы совершенствования и развития металлических, деревянных, пластмассовых конструкций в строительстве и на транспорте: Сб. научных трудов III междун. научно-техн. конф. – Самара: СамГАСУ, 2005. – с. 228-233.

55. Мищенко А.В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Труды XIX Всероссийской конференции. – Бийск, 28-31 августа 2005 г. – Новосибирск: «Параллель», 2005. – с. 184–188.

56. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Моделирование ползучести металлов на основе модифицированного закона установившейся ползучести / Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады I Всерос. конф.: Новосибирск 8–10 апреля 2008 г. – Новосибирск: НГАСУ, 2008. – с. 258–266.

57. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Длительная прочность слоистых и однородных стержней на основе модифицированного закона установившейся ползучести / Пробл. оптимального проектирования сооруж.: Док. I Всерос. конф.: Новосибирск 8–10 апреля 2008 г. – Новосибирск: НГАСУ, 2008. – с. 266–276.

58. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Нелинейное деформирование слоистого стержня / Успехи строительной механики и теории сооружений / Сб. трудов к 75-летию В.В. Петрова. – Саратов. – Изд-во СГТУ, 2010. – с. 174–184.

59. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамика плоского движения слоисто-неоднородного стержня при использовании метода Бубнова-Галеркина / Современные пробл. машиностроения: Труды V Межд. научно-техн. конф. 23–26 ноября 2010 г.; Томский политех. ун-т. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – с. 90–95.

60. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамический расчет многослойных стержней переменного сечения // Проблемы прочности элементов констр. под действием нагрузок и рабочих сред: Сб. научн. трудов, Саратов: СГТУ, 2010. – с. 96–104.

61. Немировский Ю.В., Мищенко А.В. Расчет слоистого усиления конструкций / Строительная наука и практика: Всерос. науч.-практ. конф. – Чита: ЧитГУ, 2010. – с. 46–50.

62. Немировский Ю.В., Мищенко А.В. Восстановление несущей способности стержней с дефектами / Дефекты зданий и сооружений. Усиление строительных конструкций: Материалы XV научно-метод. конф. ВИТУ, посвящ. памяти проф. В.Т. Гроздова (24 марта 2011 г.) / ВИТУ. – СПб., 2011. – с. 17–22.

63. Немировский Ю.В., Мищенко А.В. Особенности динамического деформирования композитных рам из разномодульных материалов / Материалы XVII межд. симп. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – М, 2011. – т. 2. – с. 41–43.

64. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамический расчет высотных зданий на ветровую нагрузку / Пробл. оптимального проектирования сооруж.: Док. II Всерос. конф.: Новосибирск 5 – 6 апреля 2011 г. – Новосибирск: НГАСУ, 2011. – с. 257-265.

65. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамический расчет слоисто-неоднородных балочных мостов / Ориентированные фундаментальные и при-

кладные исследования – основа модернизации и инновационного развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплексов России: Всерос. 65 научно-техн. конф. СибАДИ. – Омск: СибАДИ, 2011. – кн. 1. – с. 30–35.

66. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Оптимизация слоисто-неоднородных рам на основе кусочно-непрерывных условий прочности / Материалы V Всерос. научно-техн. конф. «Актуальные вопросы строительства». – Новосибирск: НГА-СУ, 2012. – т.1. – с. 69–74.

67. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Обратные задачи длительно нагруженных слоистых стержней и рамных систем // Динамика сплошной среды. Сб. научн. трудов / Ин-т гидродинамики СО РАН, Новосибирск, 2012. – вып. 127: Механика структурно-неоднородных сред. – с. 62–66.

68. Мищенко А.В. Решение задач рационального проектирования композитных стержневых систем на основе непрерывно-дискретного критерия (Frest v1) / Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2015614456 от 20.04.2015.

Заказ № \_\_\_\_ Тираж 120 экз. 2015 г.  
Отпечатано в типографии НВВКУ (г. Новосибирск)  
630117, г. Новосибирск, ул. Иванова, 49